CEPN Centre d'économie
de l'Université Paris Nord
CNRS UMR n° 7234

Document de travail N° 2020-08
Axe : Financiarisation Entreprise Management et Économie créative

Complément au modèle néoclassique d'unité de production : les contraintes techniques

Laurent Cabotte,
Laurent.cabotte@univ-paris13.fr
CEPN, UMR-CNRS 7234, Université Sorbonne Paris Nord

Juillet 2020

Résumé : Est proposé ici un complément au modèle néoclassique d'unité de production dans sa partie contraintes techniques. Grâce à la définition de chaque bien produit comme un assemblage de biens intermédiaires et au repositionnement de la fonction de production au niveau d'une production intermédiaire, il lui permet d'atteindre un ensemble de production pluri-outputs formé d'ensembles mono-output eux-mêmes constitués d'ensembles de productions intermédiaires et de mettre ainsi en avant une contrainte d'harmonisation des productions intermédiaires en tant que seconde dimension de l'efficacité technique de la production d'un output. Grâce, en plus, à la définition de chaque production intermédiaire comme une fonction d'un input-travail, d'un input-capital et d'un input énergie et à l'explicitation de cette fonction comme le produit de l'input-travail et de sa productivité du travail, elle-même définie comme une fonction du degré de mécanisation de la production, lui-même défini comme le rapport à l'input-travail d'une variable exprimant le travail du capital, à son tour définie comme une fonction de l'input-travail et de l'input-capital et l'input-énergie, il lui permet d'expliquer complètement la convexité de l'ensemble de production.

Mots clés : microéconomie, ensemble de production, fonction de production

Codes JEL : D21, D24

CNRS CEPN Centre d'Economie de l'Université Paris Nord UNIVERSITÉ PARIS 13

COMPLEMENT AU MODELE NEOCLASSIQUE D'UNITE DE PRODUCTION : LES CONTRAINTES TECHNIQUES

LAURENT CABOTTE[1]

Est proposé ici un complément au modèle *néoclassique d'unité de production* dans sa partie consacrée aux *contraintes techniques*. Grâce à la définition de chaque *bien* produit comme un assemblage de *biens intermédiaires* et au repositionnement de la *fonction de production* au niveau d'une *production intermédiaire*, il lui permet d'atteindre un *ensemble de production pluri-outputs* formé d'*ensembles* mono-*output* eux-mêmes constitués *d'ensembles de productions intermédiaires* et de mettre ainsi en avant une contrainte d'harmonisation des *productions intermédiaires* en tant que seconde dimension de *l'efficacité technique* de la production d'un *output*. Grâce, en plus, à la définition de chaque *production intermédiaire* comme une fonction d'un *input*-travail, d'un *input*-capital et d'un *input* énergie et à l'explicitation de cette fonction comme le produit de l'*input*-travail et de sa *productivité du travail*, elle-même définie comme une fonction du *degré de mécanisation de la production*, lui-même défini comme le rapport à *l'input*-travail d'une variable exprimant le *travail du capital*, à son tour définie comme une fonction de *l'input*-travail et de *l'input*-capital et *l'input*-énergie, il lui attribue une théorie générale de la combinaison des *inputs* qui lui permet d'expliquer complètement la *convexité* de *l'ensemble de production*.

We propose here a clarification of how handbooks of *microeconomics* usually define *technical constraints* of a *production unit* (in the context of the *general equilibrium theory*), which places labor in the center of production. It brings nonetheless more realism as well as more science and completeness. It opens the door to the *production unit* and shows how its production is done. It gives a precise typology of *inputs* and the mean to introduce the *externalization* of parts of the production toward other *production units*. It explains the key property of the *production set*, until now simply assigned to it through a hypothesis, which is its *convexity*.

Mots-clefs : *microéconomie*, *ensemble de production*, *fonction de production*.

Classification J.E.L. : *D 21* ; *D 24*.

INTRODUCTION

Cet article propose un complément au formalisme mathématique par lequel les manuels de *microéconomie* modélisent les *contraintes techniques* auxquelles fait face chaque *unité de production* avant de prendre sa *décision de production* dans le cadre d'un *modèle d'équilibre général*. Le but en est de le rendre plus performant ; c'est-à-dire, plus réaliste et plus complet dans sa démarche, de manière à lui faire rattraper son retard par rapport à l'autre modélisation *microéconomique* de la production qu'est la *programmation linéaire d'activités*.[2]

---

[1] *Centre d'économie de l'Université Sorbonne-Paris-Nord – CNRS*.

[2] Ces manuels s'inscrivent dans ce qu'on peut appeler le *modèle Hicks-Samuelson d'équilibre général*, comme le présente ARROW (1974), dans son discours de réception du *prix Nobel*, et qui renvoie notamment à trois ouvrages de référence, que sont HICKS (1939), SAMUELSON (1947) et ALLEN (1938). Pour modéliser les *unités de production* (leurs *fonctions d'offres d'outputs* et leurs *fonctions de demandes d'inputs*), ce modèle emploie des *fonctions de production concaves*. A ce

Rappelons-nous-le succinctement et constatons ses limites.[3] Il commence par l'attribution à l'unité de ses *inputs* et de son *output*. Les *inputs* sont en nombre fini et désignés par une lettre munie d'un indice, allant de 1 à leur nombre. *L'output* est désigné par une autre lettre. Si nous choisissons x et i allant de 1 à I, pour les *inputs*, et y, pour *l'output*, un vecteur *d'inputs* s'écrira $x = (x_1, \dots, x_I)$, et un *plan de production*, (x, y). Ces quantités sont supposées indéfiniment divisibles et, le plus souvent, comptées positivement : $y, x_i, i = 1, \dots, I \in \mathcal{R}_+$. Ensuite, vient le lien entre elles : *l'ensemble de production*, contenant tous les *plans de production* rendus possibles par la *technologie de production* associée à l'unité. Nommons-le G, puisque c'est le *graphe* de cette *technologie*, ou le sous-ensemble de $\mathcal{R}_+^{I+1}$ que celle-ci délimite : $G = \{(x, y) \in \mathcal{R}_+^{I+1} \colon x \; peut \; produire \; y\}$; $G \subset \mathcal{R}_+^{1+I}$. Un *plan* est donc réalisable à la condition $(x, y) \in G$. Pour les besoins de l'équilibre, cet ensemble se voit attribué les propriétés de contenir le point *origine* (le *plan inputs-output* nuls), d'être *fermé*, *monotone* et *convexe*. Sa contenance de *l'origine* signifie l'absence *d'inputs fixes*. Sa *fermeture* signifie *l'inclusion* et la *continuité* de sa *frontière*. Sa *monotonicité* signifie que tout *plan* constitué en augmentant un ou plusieurs *inputs* ou en diminuant *l'output* d'un *plan* lui appartenant lui appartient aussi et que sa *frontière* est *croissance*. Sa *convexité* induit sa *divisibilité*, la non-*croissance* des *rendements d'échelle*, la *substituabilité* de ses *inputs* et la *concavité* de sa *frontière*. Elle signifie, en effet, qu'il contient tout segment reliant deux de ses points, que si deux vecteurs, (x, y) et (x', y'), lui appartiennent et si λ est un réel compris entre 0 et 1, alors le vecteur $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y')$ lui appartient aussi.[4] Enfin, vient la pièce maîtresse : la *fonction de production*. Nommons-la $\gamma(.)$. Compte tenu de ces propriétés, elle définit cet ensemble comme suit : $G = \{(x, y) \in \mathcal{R}_+^{I+1} \colon \gamma(x) \leq y\}$, et le sous-ensemble, que nous noterons Υ, des *plans* de sa *frontière*, donnant les productions maximales qui peuvent être tirée des vecteurs *d'inputs*, comme suit : $\Upsilon = \{(x, y) \in \mathcal{R}_+^{I+1} \colon \gamma(x) = y\}$. Précisons que ces *plans* ne sont vraiment tous *efficaces* (la *continuité* de la *frontière* partout effective au sens économique) que s'il n'y a aucun d'accroissement *d'inputs* rendu inutile le long de la *frontière* par la non-*croissance* de celle-ci. Les propriétés de G et cette condition supplémentaire d'efficacité impliquent que ces *plans* sont réalisables ($\Upsilon \subset G$), que la fonction est *continue*, débute en *l'origine* ($\gamma(0) = 0$) et qu'elle est *strictement croissante* et *concave* ; autrement dit,

titre, il se situe entre le modèle initial de WALRAS (1874), repris par CASSEL (1918) et finalisée par SCHLESINGER (1934) et WALD (1936), qui recoure à des *technologies de production linéaires,* moyennant l'hypothèse particulière de profits nuls à l'équilibre, et les modèles plus modernes de ARROW et DEBREU (1954), MC KENZIE (1954), GALE (1955), NIKAIDO (1955) et DEBREU (1959), qui, eux, partent directement de l'existence d'*ensembles de productions convexes* en s'appuyant sur la *programmation linéaire d'activités*. C'est le modèle le plus présent dans l'enseignement, mais peut-être, paradoxalement, le moins visible historiquement, car le moins abouti dans sa démonstration de l'équilibre. Par exemple, COT et LALLEMENT (2006) donnent un aperçu étonnement clair de l'histoire la *théorie de l'équilibre général* à travers les trois étapes géographiques décisives, qu'ont été Lausanne (WALRAS, PARETO), Vienne (CASSEL, SCHLESINGER, WALD) et la *Cowles commission* aux Etats-Unis (ARROW, DEBREU), et le passent ainsi largement sous silence.

[3] Nous avons ravivé nos propres connaissances avec les manuels de VARIAN (1995), MALINVAUD (1999), FOURGEAUD et PERROT (1990), GUERRIEN (1992) et GUERRIEN et NEZEYS (1987).

[4] Avec, en plus, *l'additivité*, ou le fait que le vecteur fait de leur somme lui appartient aussi, on obtient des *rendements d'échelle constants*. Cela ne contredit pas sa *convexité*, mais créera un risque d'indétermination de la *décision de production*, puisque le profit pourra alors être augmenté indéfiniment à partir de toute combinaison *d'inputs* dégageant un profit supérieur à 0 par l'augmentation de l'échelle de la production. Mieux vaut en rester à des *rendements décroissants*.

que ses dérivées premières sont supérieures à 0 et ses dérivées secondes, négatives, mais finissant alors toujours par être inférieures à 0 après avoir été nulles : $\frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_i} > 0, \frac{\partial^2 \gamma(x)}{\partial x_i \partial x_i} \leqq 0, i = 1, \dots, I, \forall x \in \mathcal{R}_+^I$.

Ce formalisme compose ce qu'on peut appeler le modèle *néoclassique d'unité de production à technologie non-linéaire* (l'héritage *néoclassique* ne constituant pas, loin s'en faut, toute la *microéconomie* et débutant par des *technologies linéaires* dans le modèle de WALRAS). Comme on le voit, il porte en lui l'intention de s'en tenir à la plus pure logique du constat, de se maintenir hors de *l'unité de production*, d'observer les *inputs* y entrer, *l'output* en sortir et, par cette seule observation, de circonscrire l'ensemble des liens possibles entre les uns et l'autre. Il a l'avantage de la simplicité, mais, en fait, il est trop limitatif et souffre, à ce titre, des quatre grandes lacunes suivantes.

– D'abord, il ne différencie aucunement les *inputs* selon leur nature. Parfois, différentes lettres sont employées dans cette intention (comme T pour le travail ou C, pour le capital), mais sans autre incidence formelle. Or, les *unités de production* réelles n'achètent pas des « x », mais des *inputs* bel bien spécifiés par leur nature en raison de leurs interdépendances techniques précises.

– Ensuite, il se cantonne à la production mono-*output*, alors que les *unités* réelles produisent en général plusieurs *outputs*. Il vaudrait donc mieux introduire un nombre J de *biens* produits, les lister à travers j allant de 1 à J et faire ainsi de y un vecteur *d'outputs* : $y = (y_1, \dots y_J), y_j \in \mathcal{R}_+, j = 1, \dots, J$, et de G, un sous-ensemble *convexe* de $\mathcal{R}_+^{I+J}$.[5] Cet élargissement est souvent proposé, mais en gardant l'unicité de la *technologie*. Il consiste à utiliser une *fonction de production* pluri-*outputs* qui précise la *frontière de production* en conservant une image nulle et *l'ensemble de production*, en conservant une image négative (HICKS, 1939, p. 85, SCHUMPETER, 1983, p. 363). Si nous l'adoptons et notons cette fonction $\varphi(.)$, nous redéfinirons donc Υ et G ainsi : $\Upsilon = \{(x,y) \in \mathcal{R}_+^{I+J} : \varphi(x,y) = 0\}$; $G = \{(x,y) \in \mathcal{R}_+^{I+J} : \varphi(x,y) \leq 0\}$.[6] Ce maintien de l'unicité de la *technologie* est dicté sans doute par le souci de l'intégrité de l'unité. Sans cela, en effet, en l'absence *d'inputs fixes*, qu'est-ce qui pourrait bien limiter la variété de ses productions dès lors que celles-ci s'avèrent rentables aux prix des marchés ? Il y a bien, dans la réalité, une notion de limite technologique à cette variété. Mais le problème de cette unicité est qu'elle « noie » les *outputs* dans les *inputs* en perdant le lien entre chaque *output* et ses *inputs*. Elle rend le formalisme encore plus opaque. En réalité, une production pluri-*outputs* ne saurait procéder de la même *technologie* que dans le cas particulier où ceux-ci sont des *produits joints* : la règle générale est qu'à chaque *output* correspond sa *technologie*. Ce cas mis à part, dans ses usages empiriques, le format normal de la *fonction de production* est bel et bien mono-*output* (BRIEC et PEYPOCH, 2010).

[5] Dans ce texte, la notion de *bien* sera entendue comme un *bien* proprement dit ou un *service*.

[6] La forme d'élargissement la plus proposée consiste, en fait, à réserver à tout *bien* concerné par la production la possibilité d'être utilisé comme *input* ou produit comme *output* (par ex., MALINVAUD, 1999, p. 26, GRAVELLE et REES, 1984, p. 228). En notant B le nombre de ces *biens* ($B = I + J$) et en les lisant à travers b, tout *plan* se définit alors comme un vecteur *o d'outputs nets*, ou de différences entre la quantité de chaque *bien* produite et celle utilisée comme *input, o = put,* $o = (o_1, \dots, o_B), o_b = y_b - x_b, b = 1, \dots, B$. L'équation de la *frontière de production* est : $\varphi(o) = 0$.

– En outre, il propose une définition moniste de *l'output* et de sa *technologie de production*, alors qu'en réalité un *bien* produit se compose généralement de plusieurs « pièces » ou « parties », délimitables chacune dans la mesure où elles nécessitent leur propre processus de production moyennant leur propre *technologie*.[7]

– Enfin, il n'explique pas la *convexité* de *l'ensemble de production*. Celle-ci ne se comprend que partiellement, par la *substituabilité* des *inputs* entre eux, lorsque l'*output* est fixe. Lorsque l'*output* est libre de varier et que tous les *inputs* sauf un sont fixes, elle signifie que la *productivité marginale* (maximale) de ce seul *input* variable reste positive mais décroît : c'est un phénomène bien particulier, qui ne s'explique par sa *substituabilité* aux autres *inputs*. C'est pour le travail que la compréhension sera la plus difficile : si l'unité emploie un effectif de salariés *qualifiés* dans un certain *métier* effectuant pour elle 1000 heures de travail pour produire un certain *output*, comment expliquer que la *production horaire* décroisse de la première à la millième, ce qui semble très étrange *a priori* ? Ne le sachant pas, on ne sait pas non plus quelle plausibilité accorder à cette propriété : est-elle réaliste ou irréaliste ? Or, quand elle est retenue, c'est pour jouer un rôle-clef dans l'existence de *l'équilibre général*. Le travail est le facteur principal, par lequel tous les autres arrivent et jouent leur rôle dans la production. Sans une explication valable de la *concavité* de $\gamma(.)$ relativement à lui, cette propriété devient un mystère. Cela n'est jamais abordé dans les manuels, car ils ont une manière bien particulière de présenter *l'unité de production* qui évacue ce besoin d'explication et semble faire sens. Cette manière ne rend pas justice aux travailleurs, puisqu'elle consiste à assimiler *l'unité de production* à la *technologie de production*. Ils conçoivent l'unité (*l'entreprise*, en fait) comme l'agent-producteur, qui combine le travail et les autres *inputs* pour en sortir la production, selon sa *technologie de production*. Ils prennent donc toute *fonction de production* pour l'action de l'unité et sa *concavité*, pour les limites de sa *technologie*.[8] Il n'y a rien de très scientifique là-dedans. Ils reprennent

[7] Dans ce texte, la notion de *bien* sera entendue comme un *bien* proprement dit ou un *service*.

[8] Ils procèdent à cette assimilation, soit, directement, soit, indirectement, en assimilant, d'abord, un *producteur* ou *entrepreneur* à l'unité, puis, l'unité à la *technologie*. La première version est présente, par exemple, chez VARIAN (1995) : « *Une firme produit des outputs en utilisant diverses combinaisons d'inputs* » (p. 1), SAMUELSON (1992) : « *L'analyse néoclassique assimile le producteur à l'entreprise* » (p. 180), MALINVAUD (1999) : « *Venons-en maintenant à l'activité des producteurs, dits encore « entreprises »* » (p. 42), PINDYCK et RUBINFELD (2009) : « *Dans le processus de production, les entreprises transforment les inputs en outputs* » (p. 206) ou GRAVELLE et REES (1984) : « *The firm will in general transform a large number of inputs into a number of outputs* », (p. 162). La seconde est présente, par exemple, dans FOURGEAUD et PERROT (1990) : « *Un producteur est un agent économique qui choisit et réalise un programme (ou plan) de production* » (p. 94), BRIEC et PEYPOCH (2010) : « *Dans le cadre de la théorie microéconomique de la production* [..], *les contraintes techniques du producteur sont décrites par un ensemble de production limitant ses choix technologiques* » (p. 10), GUERRIEN (1989) : « (...) *le producteur cherche à maximiser sa production, ou à produire de la façon la plus « efficace » possible à partir des conditions technologiques existantes et des quantités de biens dont il dispose* » (p. 58), HANDERSEN et QUANDT (1990) : « *Un entrepreneur transforme des inputs en outputs, compte-tenu des règles techniques définies par sa fonction de production* » (p.49). Plus loin dans le temps, HICKS (1946) les combine : « *It will be usually caracteristic of an entrepreneur that he acquires some services (factors of production), not because he has a direct desire of them, but because he needs them for the full exploitation of his productive opportunities. The amount of these factors he employs may be taken to depend entirely upon the production which they make possible; consequently, the enterprise (the conversion of factors into products) may be regarded as a separate economic unit,*

à leur compte une coutume bien ancrée dans nos sociétés très institutionnalisées, qui consiste à concevoir une institution comme un être agissant dès lors qu'elle est dépositaire d'une intelligence et d'une nécessité *sociales* qui semblent dépasser chacune des personnes qui la composent. Nous ne pouvons les suivre sur ce terrain-là. La coutume n'exige pas de croire sincèrement à cette conception. Chacun peut dire d'un *hôpital* qu'il soigne ses patients en forme de raccourci mental, même si, concrètement, c'est son personnel soignant qui soigne avec le concours de son personnel d'entretien et de son personnel administratif. De même, chacun peut dire d'une *entreprise* qu'elle produit les biens qui en sortent, même si, objectivement, sans ses travailleurs, elle se réduit à un *patrimoine technique et financier* et une *forme juridique* rattachant ce patrimoine à une *personne juridique* (PERCEROU, 1990) et ne produit donc pas encore.[9] Scientifiquement parlant, la distinction entre l'unité et sa *technologie* demeure fondamentale. La production économique est humaine. La *technologie* n'est donc pas dans l'unité elle-même, mais dans les personnes qui travaillent pour elle (de sa base à son sommet). Elle est aussi dans la qualité de ses machines, sources d'énergie, composants et autres matières premières, mais cela vient encore des personnes qui les auront produits au sein d'autres unités.

Ces lacunes ont sans doute justifié le recours à la toute autre modélisation de la production qu'est la *programmation linéaire d'activités*, dont le document-phare est la *monographie* de la *Cowls Commission* éditée par KOOPMANS (1951, *a*) et, plus particulièrement dans celle-ci, le modèle de KOOPMANS (1951, *b*). Cette modélisation détermine partiellement la *frontière de production* comme un choix *efficace d'activités* puisant chacune dans un même ensemble de quantités de *biens* à travers un vecteur de *coefficients techniques*. Chacun des coefficients est inférieur à 0, quand *l'activité* exploite le bien qu'il concerne comme *input*, égal à 0, quand elle n'exploite ni ne produit le *bien*, ou supérieurs à 0, quand elle le produit comme *output*. Trois types de *biens* sont représentés : des *facteurs primaires* ; des *biens intermédiaires* ; des *biens finaux désirés*. Les *facteurs primaires* sont seulement exploités comme *inputs* et disponibles en quantités limitées. Les *biens intermédiaires* sont définis comme les *biens* produits comme *outputs* par certaines *activités* et exploités comme *inputs* par d'autres : il faudra donc que leur sollicitation totale donne un résultat nul pour être *efficace*. Les *biens désirés* sont toujours produits comme *outputs* : ils constituent la production à maximiser. Le puisement de chaque *activité* se fait à travers son *niveau*, ou la variable positive par laquelle sont multipliés ses coefficients. Voyons cela d'un peu plus près. Désignons par B le nombre de *biens*, listons-les à travers b allant de 1 à B, et désignons par q_b la quantité de l'un d'eux : un vecteur de quantités de *biens* s'écrit : $q = (q_1, \dots, q_B)$, avec :

---

detached of the private account of the entrepreneur. It acquires factors, and sells products ; its aim is to maximize the difference between their value » (p. 78).

[9] Selon cet éminent *juriste*, spécialiste de *l'entreprise*, celle-ci se résume en *trois sous-systèmes* (pp. 10-11) : un *sous-système patrimonial technico-financier* (en gros, son *capital* physique et financier) ; *un premier sous-système humain*, *support juridique de l'entreprise*, car *doté de sa personnalité juridique*, *assumant son risque financier* et sa *direction générale* (*stratégie à moyen et long terme*, *organigramme*) et *investi d'un droit sur ses bénéfice*, *formé par les apporteurs de capitaux* ; *un second sous-système humain*, *« prestataire de services »* - là l'auteur commet une erreur, car *producteurs* suffisait –, *formé par l'ensemble des personnes* (*en fait, uniquement ou essentiellement l'ensemble des salariés*) *chargées de la mise en œuvre du sous-système technico-financier* (production et gestion quotidiennes) – ce qui signifie bien qu'ils sont les *producteurs*.

$q_b \in \mathcal{R}, b = 1, \dots, B$. Notons A le nombre *d'activités*, listons-les à travers a allant de 1 à A, et désignons par c_{ba}, le *coefficient technique* relatif au *bien b* de l'activité a, et par v_a, le *niveau* de cette *activité*. La quantité de chaque *bien* est la combinaison linéaire des *niveaux* des *activités* : $q_b = \sum_{a=1}^{A} c_{ba} v_a, b = 1, \dots, B$. On devra avoir : $0 > q_b \geq \eta_b$, pour un *bien primaire* disponible en une quantité η_b comptée négativement ; $q_b = 0$, pour un *bien intermédiaire* ; et $q_b \geq 0$, pour un *bien désiré*. Le vecteur des coefficients de *l'activité a* s'écrit $c_a = (c_{1a}, \dots, c_{Ba})$ et son vecteur *d'inputs* et *d'outputs*, $(c_{1a} v_a, \dots, c_{Ba} v_a)$. Les hypothèses de la *divisibilité* (que chaque *activité* peut être continument augmentée ou diminuée à travers son *niveau*) et de *l'additivité* (que toutes les *activités* peuvent être conduites ensemble sans modification de leurs *coefficients*), ainsi que le principe *d'efficacité* qui régit l'accroissement de la production, permettent à cette seconde modélisation de construire un *ensemble de production* aux mêmes propriétés (un *cône convexe*). Ce principe est d'admettre comme une augmentation de la production toute modification des *niveaux* qui accroît *l'output* en au moins un *bien désiré* sans diminuer celui en aucun autre. Toute *combinaison de niveaux* qui rend impossible un tel accroissement est *efficace*. Cette maximisation de la production à la façon d'un *optimum de Pareto* définit donc la *frontière de production* comme l'ensemble des *combinaisons de niveaux* suivant : $\{(v_1, \dots, v_A) \in \mathcal{R}_+^A : q_b \geq \eta_b, pour\ un\ facteur\ primaire, q_b = 0, pour\ un\ bien\ inter, \nexists q'_b : q'_b - q_b \geq 0, pour\ un\ bien\ désiré\}$. Ainsi, la *programmation* délimite un *ensemble de production* pluri-*outputs*, permet de décomposer chaque *bien* produit et sa production en autant de *biens intermédiaires* et de *productions intermédiaires* que l'on veut et explique complètement la *convexité* de cet ensemble. De par sa dimension opérationnelle pour organiser des systèmes productifs réels à partir de ressources limitées et sa proximité avec le *modèle de Leontief* et les *tableaux inputs-outputs*, elle a paru apporter une justification concrète à l'existence *d'ensembles de production convexes*. C'est donc elle qui l'a emporté, dans la mesure où c'est elle qui a permis les démonstrations les plus abouties de *l'équilibre général*, que sont les modèles de ARROW et DEBREU (1954), MC KENZIE (1954), GALE (1955) et NIKAIDO (1955), qui partent du principe de l'existence de tels ensembles pour caractériser leurs *productions* et où n'interviennent ni *fonctions de production*, ni *fonctions d'utilité*. Etant donné les limites des *technologies linéaires*, elle a été rapidement complétée de la *programmation non-linéaire* tout en en restant au cas *convexe* (ARROW et ENTHOVEN, 1961, KUHN et TUCKER, 1951).[10]

Cependant, il y a plusieurs raisons de croire encore en le *modèle néoclassique*.

– D'abord, il s'est maintenu au centre des cours et des manuels de *microéconomie*. Son maintien ne s'explique pas uniquement par la complexité de la *programmation d'activités*, qui la rend difficilement accessible à un non-mathématicien (MALINVAUD, 1954), ou par le fait que l'existence d'une *fonction de production* peut être théoriquement déduite de celle d'une *fonction de coût*, moins contestable empiriquement (TRUCHON, 1988). Cela s'explique aussi parce que, dans son principe d'élaboration, il a le mérite de la clarté et d'un bon positionnement méthodo-

[10] Au début de l'histoire de la *microéconomie*, la notion de *coefficient technique* avait un sens général et le débat s'entretenait quant à son caractère *fixe* ou *variable*. C'est néanmoins ce caractère *variable* qui finit par donner sa force au concept de *fonction de production* (SCHUMPETER, 1983, p. 360), après quoi, la notion s'est maintenue au sens d'une quantité fixe, sauf dans le cadre de la *programmation non-linéaire* où les coefficients des activités dépendent du *niveau d'activité*.

logique. Ce principe est la mise en rapport de tout *output* avec « ses » *inputs* à travers une *technologie de production* considérée comme *exogène*. Ainsi, il ne met au plus près du sens-même de *l'économie de la production* et laisse à la réalité (les ingénieurs) le soin de définir cette *technologie*.

– Ensuite, si la *programmation* s'est éloignée du concept de *fonction de production* (la mise en relation d'un *output* avec ses *inputs* qui en minimise les *inputs* et qui, sauf précision contraire, n'est pas *linéaire*), ce n'est pas seulement par le choix de maximiser une production plurielle sous la contrainte de ressources en *biens primaires* limitées et de faire ainsi entrer la *microéconomie* dans la détermination (partielle) de la *technologie de production*, mais aussi à cause de ce qui peut être considéré comme trois maladresses. La première de ces maladresses est d'avoir défini les *activités* comme des *productions jointes*, alors que celles-ci sont rares en réalité. En revenant à des *activités* mono-*output*, le *niveau d'activité* redevient *l'output* de *l'activité*, puisque le coefficient appliqué à son *output* devient 1. En notant celui-ci y_a, on aura $y_a \equiv v_a$. La seconde est d'avoir permis à chaque *bien intermédiaire* d'entrer dans la composition d'un ou plusieurs *biens désirés*, alors qu'au niveau de généralité où se situe la définition des *biens* de la *microéconomie* il aurait été plus simple et judicieux de partir du principe qu'il n'en compose qu'un seul.[11] La troisième est d'avoir mal-interprété les quantités des *biens intermédiaires*. Si ces quantités se définissent effectivement comme des *outputs d'activités*, en revanche, elles ne sauraient être des *inputs* d'autres *activités*, puisque ces *biens* sont des « pièces » ou « parties » de *biens désirés*. Par conséquent, si l'annulation de la différence entre chacune et la quantité dont a besoin *l'output* en un *bien désiré* auquel elle s'intègre pour être complet délimite effectivement la *frontière de production*, en revanche, elle n'est pas à obtenir de l'addition des *activités*, mais à prendre en soi comme une contrainte technique *d'assemblage* ou *d'harmonisation* des *activités*, qui, par définition, leur est extérieure et met en jeu des *coefficients techniques* qui n'entrent pas dans leurs *technologies*. Par exemple, si le *bien* 4 est un *bien désiré* dont les *biens* 1,2,3 sont les uniques et exclusives parties, si chacune de ses unités doit se composer, respectivement, de $\rho_1^4, \rho_2^4, \rho_3^4$ unités de ces *biens* pour être complète, si les *activités* 1,2,3 sont les seules à produire ces derniers et mono-*output* et si la 4 est *l'activité* qui finalise sa production en faisant l'assemblage de ses trois parties : alors, s'il est vrai que *l'efficacité technique* implique l'égalité $\rho_1^4 y_4 = y_1, \rho_2^4 y_4 = y_2, \rho_3^4 y_4 = y_3$; autrement dit, $y_4 = \frac{y_1}{\rho_1^4} = \frac{y_2}{\rho_2^4} = \frac{y_3}{\rho_3^4}$, puisque la quantité qui en est produite est *a priori* le minimum de ces ratios, $y_4 = min\left\{\frac{y_1}{\rho_1^4}; \frac{y_2}{\rho_2^4}; \frac{y_3}{\rho_3^4}\right\}$, en revanche, il serait inopportun d'écrire le vecteur *d'inputs-output* de la 4 $(c_{14}y_4, c_{24}y_4, c_{34}y_4, y_4, c_{54}y_4, \dots, c_{A4}y_4)$, en posant $c_{14} = -\rho_1^4, c_{24} = -\rho_2^4, c_{34} = -\rho_3^4$, puisque ces trois coefficients relèvent de *l'harmonisation* de ces *activités*. Le bon vecteur est $(y_4, c_{54}y_4, \dots, c_{A4}y_4)$. En leur donnant un seul *output*, en un *bien intermédiaire* ou *désiré*, en dédiant cet *output* à un seul *bien désiré* lorsqu'il s'agit d'un *output* en un *bien intermédiaire*, en les reliant par de telles contraintes *d'efficacité* et en ne limitant pas les ressources en *inputs* de l'unité, il devrait être assez facile de revenir à une modélisation de chaque *activité* par une *fonction de*

[11] Chez un fabricant de lampes, un petit modèle d'ampoule composera une petite lampe et un grand modèle, une grande. Chez un fabricant de véhicules, un petit modèle de roue composera une auto et un grand, un camion. Etc. Chaque modèle nécessitera un rapport différent des *inputs* à *l'output*.

production et de présenter la production d'un *bien désiré* comme un assemblage de fonctions.

– Enfin, dans son état actuel, le modèle *néoclassique* reste une ébauche et rien n'empêche de le compléter. Ces avancées recherchées par la *programmation d'activités*, dans l'approche de la production, montrent la voie à suivre. S'il parvenait, à sa façon, à un *ensemble de production* pluri-*outputs*, où chaque production d'un *output* est décomposée en *productions intermédiaires*, et à proposer sa propre théorie de la *convexité*, en explicitant la manière générale dont se combinent les *inputs* pour produire *efficacement* un *output intermédiaire*, ce qui rejoindra le souci de différencier les *inputs* selon leur nature, il comblerait ses lacunes tout en continuant de présenter ces avantages de la clarté et d'un bon positionnement méthodologique. Précisons cela un peu. La *programmation* montre que l'atteinte de l'ensemble pluri-*outputs* se fait en même temps que l'introduction des *biens intermédiaires*. Les *activités* peuvent être réinterprétées plus largement comme des *productions intermédiaires* délimitables à l'aide de *fonctions de production intermédiaire*, certaines produisant des *biens intermédiaires*, d'autres l'assemblage de ces *biens* pour arriver aux *biens* produits (*désirés*). Dès lors, les *inputs* de chaque *output* apparaîtraient clairement comme les *inputs* de celles produisant et assemblant les *biens intermédiaires* qui composent le *bien* produit, à condition, toutefois, de faire attention à la capacité de ceux ayant la nature de capital d'entrer dans plusieurs d'entre elles, et la *fonction de production* de *l'output* pourrait réapparaître en reliant ces *fonctions de production intermédiaire* par les *coefficients techniques* d'assemblage de ces *biens intermédiaires*. *L'ensemble de production* pluri-*outputs* serait ainsi la réunion d'ensembles mono-*output* qui eux-mêmes seraient chacun la réunion *d'ensembles de production intermédiaires*. Dans ce nouveau contexte, les propriétés de l'ensemble seraient celles des *ensembles de production intermédiaire* : la théorie de la *convexité* serait donc à trouver dans l'explicitation de la *fonction de production intermédiaire*. Il faudrait donner à cette fonction la forme qui dévoile la logique générale de combinaison de ses *inputs* leur permettant de produire *efficacement* son *output intermédiaire* de façon à mettre en évidence les conditions précises à sa *concavité*. C'est un tout autre exercice que celui qui consiste à donner *une forme économétrique*. Pour rester générale et ne pas gêner le travail *économétrique*, la forme devrait embrasser toutes les formes numériques possibles et rester dans l'interprétation théorique la plus générale du travail de ses *inputs*.

Alors, un tel complément peut-il vraiment être apporté au modèle ? Peut-il aller jusqu'à expliquer complètement la *convexité* ? Notre réponse est oui et, pour s'en faire une opinion tout de suite, le voici précisément résumé en deux paragraphes.

Faisons le lien entre les deux modélisations. Considérons chaque *activité* de la programmation comme une *production intermédiaire* à la manière *néoclassique*. Notons x_a le vecteur *d'inputs* de la *production intermédiaire* a, en les comptant, cette fois, positivement, et y_a, son *output intermédiaire*. Le vecteur (x_a, y_a) est un *plan de production intermédiaire*. Notons I_a son petit nombre *d'inputs*. Un vecteur *d'inputs* de *l'unité de production* s'écrit désormais $x = (x_1, \dots, x_A)$. N'en concluons pas que $I = \sum_{a=1}^{A} I_a$, car il y aura forcément des *inputs* qui ont la nature de capital (machines-outils) et il faut prendre garde au fait que de tels *inputs* ont le pouvoir de servir à plusieurs *outputs intermédiaires* n'entrant pas forcément dans la composition du même *output*. Le vecteur x se compose maintenant de J sous-vecteurs x_j, réunissant chacun les *inputs* des *productions intermédiaires* d'un *output* : $x = (x_1, \ldots, x_J); x_j = vecteur\ des\ x_a\colon y_a\ output\ intermédiaire\ de\ y_j$. Pour chaque *output* y_j, notons I_j, le nombre de ses *inputs*, N_j, celui de ses *outputs intermédiaires*, et référençons ces derniers à travers l'indice n_j, allant de 1 à N_j, et l'exposant j. Un *plan* d'une de ses *productions intermédiaires* se réécrit $\left(x_{n_j}^j, y_{n_j}^j\right)$. Son vecteur *d'inputs* se réécrit $x_j = \left(x_1^j, \ldots, x_{N_j}^j\right)$, moyennant la présence d'éventuels *inputs*-capital communs. Le nombre total de *productions intermédiaires*, $A \equiv \sum_{j=1}^{J} N_j$, est au moins égal à celui de *biens* produits (dans le cas-limite où chaque *bien* serait d'une seule « pièce ») : $A \geq J$. Définissons maintenant chaque *production intermédiaire* grâce à une *fonction de production intermédiaire* $f_{n_j}^j(.)$ et sa relation à son *output*, comme un *coefficient technique* $\rho_{n_j}^j$. Cela nous permet de définir chaque *output* à travers son propre *ensemble de production* G_j, comme le plus petit des rapports de ses *outputs intermédiaires* à leurs coefficients respectifs : $G_j = \left\{(x_j, y_j) \in \mathcal{R}_+^{I_j}\colon y_j = min\left\{\frac{y_1^j}{\rho_1^j}; \ldots; \frac{y_{N_j}^j}{\rho_{N_j}^j}\right\}, y_{n_j}^j \leq f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right), n_j = 1, \ldots, N_j\right\}, j = 1, \ldots, J$. Le comportement rationnel de l'unité, qui délimitera la *frontière* de l'ensemble, consistera, à la fois, à maximiser ses *productions intermédiaires* et à encadrer ses acquisitions *d'inputs* de sorte à maintenir égaux ces ratios. Il pourra donc se modéliser par *l'isoquante* de la *correspondance en inputs* de *l'output*, où la fonction $L_j^*(.)$ suivante : $L_j^*(y_j) = \left\{x_j \in \mathcal{R}_+^{I_j}\colon y_{n_j}^j = f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right) = \rho_{n_j}^j y_j, \forall n_j \in [1; N_j]\right\}, j = 1 \ldots, J$, qui délimitera la *frontière* comme suit : $Y_j = \left\{(x_j, y_j) \in \mathcal{R}_+^{I_j}\colon x_j \in L_j^*(y_j)\right\}, j = 1, \ldots, J$. Une *fonction de production* mono-*output* $\gamma_j(.)$ restera utile dans ce contexte, mais au domaine de définition restreint à $L_j^*(y_j)$. De cette façon, le modèle atteindra l'ensemble pluri-*outputs* en réunissant des ensembles mono-*output* : $G = \bigcup_{j=1}^{J} G_j$. Il restera simplement à définir les taux marginaux de variation de *l'output* le long de sa *frontière*, ou la dérivée de $\gamma_j(.)$, pour qu'il reprenne un cours quasi-normal.

Dans ce nouveau contexte, un *input* d'un *output* est un argument d'une ou possiblement plusieurs, si c'est un *input*-capital, de ses *fonctions de production intermédiaire*. Son accroissement a pour effet d'accroitre l'image de cette ou ces fonctions et donc, d'accroître potentiellement *l'output*. La fonction *isoquante* de la *correspondance en inputs de l'output* répondra par l'ensemble des possibilités de variations des autres *inputs* de *l'output* induisant des accroissements des images de leurs fonctions qui concrétiseront cet accroissement de *l'output*. Dans le cas d'un *input*-capital servant à plusieurs *outputs intermédiaires* de *l'output*, elle pourra choisir l'un d'eux et ajuster les autres à l'aide de leurs autres *inputs*. Dans ces conditions, la *productivité marginale* de *l'input* se mesurera à travers la dérivée de sa *fonction de production intermédiaire* ; par conséquent, la *convexité* sera vérifiée si cette dérivée est supérieure à 0 et si la dérivée seconde, elle, est négative. Pour expliquer ces signes, il faut donc donner à la fonction la forme qui exprime la théorie générale de combinaison de ses *inputs*. La théorie que nous proposons commence par restreindre la liste de ses *inputs* à un *input*-travail, un *input*-capital et un *input*-

énergie consommé par ce capital. Cette restriction a deux fondements : la *convexité*-même, qui exclue toute proportionnalité d'un *input* à un *output* (*intermédiaire*), ce qui serait le cas des matières premières, et toute *complémentarité* des *inputs*-travail et des *inputs*-capital ; le postulat que la *technologie de production intermédiaire* émane d'un *métier*, d'une *profession*. Le premier fondement n'implique pas une exclusion définitive des *inputs proportionnels* (une incomplétude du *modèle néoclassique*) et donne un aspect réaliste et contemporain à l'usage du capital. Ces *inputs* pourront être récupérés dans la modélisation de la *décision de production*. En effet, en faisant la somme des multiplications de leurs *coefficients techniques* et de leurs prix pour chacun, on pourra définir le *coût unitaire* en de tels *inputs* de chaque *bien* produit. Une fois retranché au prix du bien, ce *coût unitaire* définira son *prix de vente net*. Cela ne changera pas grand-chose à cette décision, puisque le *prix de vente net* comme le prix de marché seront des *données*. Une fois les matières premières écartées, il ne restera comme natures *d'inputs* que du travail, du capital et des sources d'énergie. Or, plus un *input*-capital est simple et se ramène à l'outil manuel, plus il devient *complément nécessaire* d'un *input*-travail. La *substituabilité* de ces *inputs* sera donc particulièrement explicite, moderne et réaliste, en admettant que chaque *input*-capital se combine à un *input*-énergie qui lui donne une force de travail (de calcul, de mouvement) par laquelle il se substitue à du travail humain. Le second fondement ne fait que prolonger la caractérisation d'un *input*-travail qui se fait depuis toujours en *microéconomie* : celle par son appartenance à un *métier*, une *profession*. Or, un *métier*, une *profession*, produit un certain type de *biens* et fait aussi appel à certain type de capital. On peut donc étendre sa caractérisation, non seulement, à *l'input*-capital qui se combine à lui et à son produit immédiat, qui sera pour nous un *output intermédiaire*, mais aussi, par conséquent, à la *technologie* qui les réunit, qui sera une *technologie de production intermédiaire*. On pourra ainsi prendre le *métier* pour ce qui définit cette *technologie*, sachant qu'il peut produire différents *biens* du même type et donc, définir différentes *technologies*. Notre théorie consiste, ensuite, à expliciter *l'output intermédiaire* comme le produit de *l'input*-travail et d'une *productivité du travail* (production par unité *d'input*-travail : *horaire*, si l'unité est l'heure). Ce schéma général a, à son tour, deux fondements : le caractère humain de la production et donc, la primauté de *l'input*-travail, ou le fait que la *productivité* des deux autres doit passer par lui ; la constance de *l'efficacité du travail* (du contenu en travail des unités *d'input*-travail). Le premier est une nouveauté, mais ne fait que rappeler qu'en général ce sont les travailleurs qui utilisent les machines et non l'inverse. Le second est depuis toujours utilisé en *microéconomie* pour mettre le travail au centre d'un marché concurrentiel. Notre théorie précise, enfin, cette *productivité* comme une fonction, de nouveau, des trois *inputs*, sur la base des trois derniers postulats suivants : sa croissance avec le *degré de mécanisation de la production* ; la définition de ce degré comme le rapport du *travail du capital* à *l'input*-travail ; la définition de ce *travail du capital* comme une fonction, de nouveau, des *inputs*-travail, capital et énergie. Le premier est une évidence. Le second peaufine et enrichit la définition de ce degré en explicitant le fait que le capital travaille aussi à la production. Le troisième compte aussi *l'input*-travail comme déterminant du *travail du capital* puisqu'il consiste notamment à l'utiliser. Si on note $T_{n_j}^j$, *l'input*-travail, $C_{n_j}^j$, *l'input*-capital, $E_{n_j}^j$, *l'input*-énergie, $g_{n_j}^j(.)$, la *fonction de productivité du travail*,

$\Gamma_{n_j}^{j}$, le *travail du capital* et $k_{n_j}^{j}(.)$, la *fonction* qui le délimite, notre théorie est donc : $f_{n_j}^{j}\left(T_{n_j}^{j}, C_{n_j}^{j}, E_{n_j}^{j}\right) \equiv T_{n_j}^{j} \cdot g_{n_j}^{j}\left(\frac{\Gamma_{n_j}^{j}=k_{n_j}^{j}\left(T_{n_j}^{j}, C_{n_j}^{j}, E_{n_j}^{j}\right)}{T_{n_j}^{j}}\right)$. Elle ne restreint nullement les formes numériques possibles de $f_{n_j}^{j}(.)$ et les signes de ses dérivées dépendront des propriétés de $g_{n_j}^{j}(.)$ et $k_{n_j}^{j}(.)$, ce qui conduira à un exposé précis de la *convexité*.

Il va de soi que nous n'entendons pas défendre, à nous-seuls, la pertinence d'un tel complément. C'est une proposition que nous faisons à l'ensemble de la communauté. Elle-seule pourra en juger. Nous le présenterons en suivant le plan suivant. D'abord, nous clarifierons *l'ensemble d'inputs*. En présentant la structure de la production pluri-*outputs* de l'unité comme un assemblage de *productions intermédiaires* et en postulant tout de suite que la *technologie* d'une *production intermédiaire* provient d'un *métier* (d'une *profession*) et que son vecteur *d'inputs* se compose d'un trio *d'inputs*-travail, capital et énergie, nous préciserons les *inputs*, non seulement, par leur allocation à ces dernières, mais aussi, dans leur nature précise. Ensuite, nous délimiterons *l'ensemble de production* en délimitant *les ensembles de production intermédiaire*. Nous commencerons par admettre l'existence de *marchés de biens intermédiaires*, mais sans avoir à tenir compte des achats et ventes de l'unité sur ces marchés à ce stade des *contraintes techniques*. Cela fait, nous parcourrons chaque *frontière de production* mono-*output* en repositionnant, dans ce nouveau contexte, la *fonction de production* mono-*output* et sa dérivée. Cette frontière et cette fonction réuniront les *frontières* et *fonctions de production intermédiaire*. Enfin, nous présenterons cette explicitation de la *fonction de production intermédiaire* et l'explication de la *convexité* qui en découle et apprécierons la plausibilité de cette explication.

1. *L'ENSEMBLE D'INPUTS*

Notre point de départ est le suivant. Notre *unité de production* produit *J biens*, listés à travers j, dans des quantités y_j. Fidèles à l'approche *néoclassique*, nous avançons que ce qui définit un *bien* produit, c'est sa *technologie de production* (son processus de création) et nous tenons cette *technologie* pour techniquement optimale et exogène (fixée par la réalité dans l'éventualité d'une approche empirique).[12] Nous admettons donc qu'en dehors du cas particulier des *productions jointes*, deux *biens* sont différents si les *technologies* de leurs productions sont différentes. Nous admettons que notre unité n'a pas de *productions jointes* et réunit *J technologies*. Nous réitérons cette fidélité en admettant que chacun de ces *biens* se compose d'un assemblage de *biens intermédiaires* définis (non-conjointement) par leurs *technologies de production intermédiaire* techniquement optimales et *exogènes*. La *technologie de production* d'un *bien* est donc l'assemblage de ses *technologies intermédiaires*. Comme nous n'avons pas de raison d'exclure les *biens* composés d'une

[12] Attention, la notion de *technologie* s'entend, en *microéconomie*, dans le sens de meilleure *technologie*. La production de tout *bien* de l'économie peut passer par différentes *technologies* à l'efficacité inégale ; il en est une qui tire le plus *d'output* de tout *vecteur d'inputs* et, étant donnée l'hypothèse de parfaite information, c'est celle à l'œuvre dans les *unités de production*.

seule pièce, nous supposons, plus exactement, que chaque *bien* produit se compose d'un nombre supérieur ou égal à 1 de *biens intermédiaires*. Nous introduisons, à cet instant, une subtilité importante : nous distinguons ce nombre et celui des *productions intermédiaires* en admettant que la production du *bien* peut exiger aussi des *productions intermédiaires* qui ne produisent pas de *biens intermédiaires* à proprement parler, mais sa finalisation. C'est une subtilité réaliste. Qu'on songe à *l'assemblage final* ou au *contrôle de la qualité* : ce sont des activités essentielles, nécessitant des *technologies* spécifiques.

Nous notons N_j le nombre de *productions intermédiaires* qu'exige le bien j et les listons à travers n_j allant de 1 à N_j. Cet indice et l'exposant j caractériseront tous les éléments se rapportant à une *production intermédiaire*, à commencer par son *output*, $y^j_{n_j}$, et sa « localisation » dans le système productif de l'unité qui l'identifiera en tant que telle, que nous notons $l^j_{n_j}$. La liste l_j des *productions intermédiaires* que nécessite la production du *bien* j sera donc $l_j = \left(l^j_1, \dots, l^j_{N_j}\right), j = 1, \dots, J$, et la liste l de toutes les *productions intermédiaires* de l'unité sera : $l = (l_1, \dots, l_J)$. Pour bien comprendre cette structure de production, nous notons $\rho^j_{n_j}$ le *coefficient technique* de la *production intermédiaire* $l^j_{n_j}$, ou la quantité de ce *bien* ou de cet *output intermédiaire* qu'en exige chaque unité de *bien* j. C'est une *donnée* et un *réel* supérieur à 0. Cette exigence signifie que le *bien* est invendable sur son marché, même à un prix rabaissé, s'il n'a pas en lui cette quantité. Ces coefficients peuvent inclure une hiérarchisation des *productions intermédiaires* sous la forme de relations techniques linéaires entre eux.[13] Le même formalisme sera bien sûr appliqué aux *productions intermédiaires* finalisant le *bien*. Nous continuerons de voir leur résultat comme un *output intermédiaire*, même si, quantitativement, ce sera *l'output* lui-même à travers un *coefficient technique* égal à 1. Un coefficient unitaire pourra donc signifier que le *bien* exige une unité d'un *bien intermédiaire* ou qu'il doit systématiquement être « traité » (*assemblé* ou *contrôlé*).

Pour réaliser ses productions, l'unité réunit des *ressources* que sont les quantités des différents travaux et des différents *biens* qui lui fournissent ses *inputs*. Nous notons R le nombre total de ces *ressources* et les listons à travers r. Nous désignons par q_r la quantité de la $r^{ième}$ ressource : c'est un réel positif. Un vecteur de *ressources* s'écrit $q = (q_1, \dots, q_R)$ et *l'ensemble de ressources*, $Q = \{q \in \mathcal{R}^R_+\}$. De leur répartition entre les *outputs intermédiaires*, viendra la définition des *inputs*. Le nombre *d'inputs* sera donc nettement supérieur au nombre de *ressources* : $I > R$. Les travaux lui parviennent sous forme d'unités de temps dans le cadre de *contrats de travail*. Compte-tenu de l'attendu qu'est la *convexité* de *l'ensemble de production*, les différents *biens* ne comptent pas les *matières premières*, qui pourront être récupérées dans la *décision de production*. Ce sont donc les *biens* constituant le

[13] Par exemple, les *biens intermédiaires* 1 et 2 du *bien* j peuvent être deux parties de son *bien intermédiaire* 6. S'il faut, respectivement, w_1 et w_2 unités de ces *biens* pour constituer une unité de ce dernier, alors c'est que $\rho^j_1 = w_1\rho^j_6$ et que $\rho^j_2 = w_2\rho^j_6$. Si celui-ci entre à son tour dans la composition d'un *bien intermédiaire* de rang supérieur, par exemple, le 10, à hauteur du coefficient v_6, alors c'est que $\rho^j_6 = v_6\rho^j_{10}$ et donc, que $\rho^j_1 = w_1v_6\rho^j_{10}$ et que $\rho^j_3 = w_3v_6\rho^j_{10}$. Etc. Ces relations entre coefficients suffisent à modéliser la hiérarchisation de la production.

capital physique de l'unité ou des sources d'énergie. Le fait de ne retenir que du travail, du capital et de l'énergie est tout à fait inhabituel en *microéconomie*. Cela résulte de cet attendu et de cette clarification de la production en *productions intermédiaires*. Tous les autres types *d'inputs* envisagés jusque-là en *microéconomie* correspondent, en fait, à des *biens intermédiaires* achetés sur des marchés. Or, comme leur nom l'indique, ces *biens* ont un statut intermédiaire entre *inputs* et *outputs* et s'introduisent à travers l'ouverture de marchés où l'unité a la possibilité, non seulement, d'acheter, mais aussi, de vendre. Nous préciserons cette possibilité au début de la seconde partie. Pour avancer dans la caractérisation de ces ressources, nous utilisons, d'abord, le postulat qu'une *technologie de production intermédiaire* est, en fait, un *métier*, une *profession*, puis, deux modèles de répartition des ressources, l'un spécialisé et l'autre polyvalent.

1.1. PRODUCTION ET METIERS

Modéliser la production suppose un minimum d'information sur son organisation *sociale*. Par organisation *sociale*, il faut entendre de vastes préalables à son accomplissement, qu'on peut, très schématiquement, classer en deux ordres de mission : la préparation ; la sécurisation. Dans les préalables de sécurisation, on reconnaîtra, par exemple, les *assurances sociales* contre *les maladies professionnelles et les accidents du travail*, dont l'Histoire a partout révélé l'importance pour arriver à une société économiquement développée.[14] Dans les préalables de préparation, on reconnaîtra notamment la *formation* et *l'orientation professionnelles*, qui visent globalement à apparier, d'un côté, les besoins des *unités de production*, et, de l'autre, les capacités et les goûts des individus. C'est dans cette partie de l'organisation *sociale* que ces notions sont centrales.[15] Un *métier*, une *profession*, est une *convention* établie à l'échelle *individuelle*, qui définit un individu pour sa maîtrise d'un type *général* de production, ou de combinaison du type de travail, de capital et de matière première, qu'il requière, et qui délimite aussi, par conséquent, l'ensemble des savoir-faire assimilable par un individu qui lui donne cette maîtrise. Le type de production est *général* (*transversal*), car commun aux *unités de production* d'un ou plusieurs *secteurs de production*. Cette *convention* est donc séparée des productions réelles par une polyvalence relative, ou la capacité de s'ajuster à la variété des productions précises au sein du type. Cette maîtrise s'atteste véritablement en situation de production, par le constat de *l'autonomie* du travailleur, ou de sa capacité de les accomplir sans *l'aide* de tiers *encadrants*, qui fait de lui un travailleur *qualifié*. Avec les institutions de *formation et d'orientation* qui leur sont attachées, ces *conventions* « peuplent » les *unités de production* de travailleurs-producteurs et les soulagent de la partie *générale* de la formation aux différentes composantes de leur production. A travers elles, la *société* se présente aux unités un peu comme un vi-

[14] La *microéconomie de l'assurance* ne peut qu'entrevoir ces systèmes par les limites des *marchés d'assurance* et *l'économie publique de la redistribution* (GOLLIER, 1996, HENRIET et ROCHET, 1991). Cela tient à ce qu'elle repose sur les choix individuels alors que ces systèmes relèvent d'une application *sociale* de *l'assurance* (EWALD, 1986) (émanant de la *société* comme un tout en ce qu'elle conserve de communautaire à travers l'élaboration de l'institution centrale qu'est la loi).

[15] Il y a bien une approche *microéconomique* des choix des individus dans cet appariement, celle de la *théorie du capital humain* (BECKER, 1962), mais pas de la construction de ces notions, qui relève davantage d'une intelligence *sociale* (non-médiatisée par les marchés) de la production.

vier de potentialités plus ou moins immédiates de productions individuelles dans laquelle elles peuvent puiser. Bien sûr, en réalité, ces conventions n'accomplissent pas toute la coordination. D'un côté, la singularité des individus rejaillit plus ou moins dans le travail, de l'autre, les caractéristiques de la production requièrent une réalisation plus ou moins spécifique de ces potentialités. Mais là est l'intention à retenir d'elles. *La microéconomie* n'a pas besoin de les connaître toutes, mais d'en reconnaître simplement l'existence pour comprendre, d'une part, que la production est humaine et *s'organise* donc *socialement* autour de l'individu avant de s'organiser en *unités de production*, et, d'autre part, qu'elles constituent le principe élémentaire de délimitation d'une production. On peut donc leur faire confiance et décider que nos *outputs intermédiaires* sont produits chacun par des travailleurs *qualifiés* dans un certain *métier*. Chacun d'eux se caractérise, dès lors, par sa *technologie* relevant de ce *métier*, mais, compte-tenu de cette polyvalence relative, on ne peut exclure que plusieurs d'entre eux soient produits par des *technologies* relevant du même *métier*.

Depuis qu'elle existe, la *microéconomie* caractérise un *input*-travail par son appartenance à un *métier*.[16] Cette reconnaissance du *métier* comme une *technologie de production individuelle* plus ou moins *polyvalente*, qui se concrétise précisément dans le travail du travailleur qui le possède au sein de *l'unité de production* qui fait appel à lui, doit permettre d'étendre cette caractérisation au produit immédiat de ce travail et au capital qui se combine à lui. En général, les *unités de production* réelles réunissent plusieurs *métiers* et un effectif de travailleurs et un capital plus ou moins importants dans chacun d'eux. Elles procèdent à des montages plus ou moins savants de *productions intermédiaires* pour parvenir à des productions de *biens* plus ou moins sophistiqués, à contenu technologique plus ou moins important, pouvant eux-mêmes avoir le statut de *bien final*, pour des consommateurs, ou de *biens intermédiaires*, pour d'autres *unités de production*. Pour les modéliser fidèlement, nous pouvons voir leur développement à la manière d'un *château de cartes*. *L'unité de production* la plus basique est, en fait, un unique travailleur *qualifié* dans un unique *métier*, qui produit un ou plusieurs *biens* de la même famille, à l'aide du capital propre à ce *métier* et des sources d'énergie que consomment ce capital (et des matières premières...). C'est donc en principe un *travailleur indépendant* qui a monté sa mini-entreprise. S'il produit différents *biens* à travers différentes *technologies* relevant de son *métier*, si par sa polyvalence le capital leur est adapté à tous mais consomme différemment son énergie relativement à la quantité produite de l'un à l'autre, son activité se formalisera déjà comme un *ensemble de production* pluri-*outputs*, comportant un *input*-capital et autant *d'inputs*-travail et autant *d'inputs*-énergie que *d'outputs*. Ensuite, nous pouvons développer l'unité dans deux directions : l'augmentation de l'effectif dans le *métier* ; l'augmentation du nombre de *métiers*. Si notre travailleur n'a pas, à lui-seul, la capacité de réaliser tout le *bénéfice* que permettent les marchés où s'écoulent ses *outputs*, il peut décider de s'aider de travailleurs supplémentaires, *qualifiés* comme lui, et en faire ses *associés* ou ses *salariés*. Cet apport de main-d'œuvre grossira ses *inputs*-travail. L'*input*-capital devra suivre et, de ce fait, consommer davantage d'énergie. Son *ensemble*

[16] Dans le *modèle de l'équilibre général d'échange et de production*, tout *consommateur* a ainsi en dotation initiale, une *encaisse* de monnaie, un temps disponible et une *qualification*.

de production sera le même, mais son entreprise s'y situera à des quantités moins limitées. Si ses *biens* sont *finaux* et s'adressent à des particuliers et s'il ne désire pas sortir du cadre de sa *qualification*, il pourra en rester là. Si ses *biens* sont *intermédiaires* et s'adressent à des *unités de production* qui les assemblent à d'autres pour produire des *biens* plus complexes, il pourra initier une nouvelle phase de développement de son unité en cherchant à les imiter. En s'associant des travailleurs *qualifiés* dans d'autres *métiers*, il pourra chercher à produire lui-même un ou plusieurs de ces *biens* plus complexes. Dans cette éventualité, son *ensemble de production* comportera les quantités produites de ces *biens* plus complexes, un plus grand nombre *d'inputs*-travail, un plus grand nombre *d'inputs*-énergie et plusieurs *inputs*-capital ; il pourra se décomposer en *sous-ensembles* mono-*outputs* et en *ensembles de production intermédiaire* dont le regroupement de certains d'entre eux figurera son ensemble originel.

Notre *unité de production* doit représenter toute l'étendue des possibles. Nous pouvons donc lui adjoindre un nombre (*naturel*) de *métiers* supérieur ou égal à 1, que nous notons M et les lister à travers l'indice m allant de 1 à M. Nous pouvons admettre que chacun d'eux lui sert à produire un ou plusieurs *outputs intermédiaires* entrant dans la composition d'un ou plusieurs *outputs*. Ainsi, dans le cas le plus basique, M, J et le nombre de *productions intermédiaires* seront égaux à 1 : le seul *métier* servira à produire un seul *output intermédiaire* qui sera l'unique composante d'un unique *output* et donc, cet *output*. Dans le cas le plus complexe, M sera suffisamment grand pour que soient produits plusieurs *outputs* obtenus chacun de l'assemblage de différents *outputs intermédiaires* relevant de différents *métiers*. Un *métier*, avons-nous dit, est une *technologie de production générale*, ou un principe d'association de travail, de capital, d'énergie (et de matières premières) pouvant induire plusieurs *technologies précises* de différents *biens* d'une même famille. A chacun, nous pouvons donc associer une quantité de travail, T_m et une quantité de capital, C_m. Les sources d'énergie ont leur classification propre d'après leur nature. On désigne par S le nombre de natures différentes de sources utilisées dans l'unité et on les liste à travers s allant de 1 à S. Nous explicitons ainsi le nombre de *ressources* à travers l'identité $R \equiv 2M + S$ et tout vecteur de *ressources*, à travers l'identité $(q_1, \ldots q_r) \equiv (T_1, \ldots, T_M, C_1, \ldots C_M, E_1, \ldots, E_S)$. La limite *technique* à la variété des productions de l'unité (avant même de parler de leur rentabilité) est donc à trouver dans le fait que cette *combinaison de métiers* doit se retrouver dans chacune d'elles, à travers des *technologies* distinctes. Ces *métiers* doivent toujours travailler ensemble et dégager, de cette façon, une *unité technologique de production*. Ainsi les modèles de *biens* peuvent-ils varier au cours du temps, mais pas les *métiers*.

Travail, capital et énergie sont alloués aux *outputs* à travers les *outputs intermédiaires*. La *substituabilité* des *inputs* se joue au sein de chacune des *productions intermédiaires* et celles-ci sont *complémentaires*. Elle n'existe donc pas entre *inputs* de *productions intermédiaires* différentes. Pour la garantir autant que pour être réalistes, nous pouvons admettre que tout *input*-capital a la forme d'une machine douée de mouvement ou de calcul de par sa consommation d'une source d'énergie.[17] Le processus de production élémentaire de notre unité est donc celui d'une *production*

[17] Plus un capital est simple et se réduit à l'outil manuel, plus il devient un *complément* du travail.

intermédiaire, qui se présente comme une relation entre un *output intermédiaire*, $y_{n_j}^j$, et un vecteur *d'inputs*-travail, capital et énergie, $\left(T_{n_j}^j, C_{n_j}^j, E_{n_j}^j\right)$, composés de parties des quantités de travail et de capital d'un *métier* et d'une certaine source d'énergie. Les *inputs*-travail et énergie lui sont exclusifs, tandis que *l'input*-capital sert peut-être aussi à produire d'autres *outputs intermédiaires*.

1.2. REPARTITION DES RESSOURCES

Deux modèles de répartition des *ressources* peuvent être retenus : l'un, spécialisé, *output intermédiaire* par *output intermédiaire* ; l'autre, polyvalent, groupe *d'outputs intermédiaires* par groupe *d'outputs intermédiaires*.

– Le premier vaut pour toute *ressource* telle que toute composante d'elle-même tendant vers 0, dq_r, ne peut servir qu'à la production d'un seul *outputs intermédiaire*. Il se définit donc par l'égalité $q_r = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n_j=1}^{N_j} q_{n_j}^j$, dans laquelle est identifiée par l'indice n_j l'exposant j la partie de la quantité allouée à la *production intermédiaire* $l_{n_j}^j$ et chaque partie est supérieure ou égale à 0 : $q_r > 0 \Rightarrow q_{n_j}^j \geq 0, j = 1, \dots, J, n_j = 1, \dots, N_j$. Il est, en effet, peu probable qu'une *ressource* le soit pour tous les *outputs intermédiaires*.

– Le second vaut pour toute *ressource* telle que toute composante d'elle-même tendant vers 0 peut servir à la production d'un ou plusieurs *outputs intermédiaires*. Chaque partie d'une telle *ressource* est donc référencée par le groupe de *productions intermédiaires* auxquelles elle est allouée qui lui est propre. Nous notons B_r le nombre de ses parties et les listons à travers b_r. Nous notons P_{b_r} le groupe de *productions intermédiaires* d'une partie : $P_{b_r} = \left\{ l_{n_j}^j \in l : q_r^{P_{b_r}} \textit{ sert à produire } y_{n_j}^j \right\}$. Ce type de répartition se définit donc par l'égalité $q_r = \sum_{b_r=1}^{B_r} q_r^{P_{b_r}}$, dans laquelle toute partie est supérieure à 0 : $q_r > 0 \Rightarrow q_r^{P_{b_r}} > 0, b_r = 1, \dots, B_r$. Par exemple, si q_r est l'objet de trois allocations, l'une à la *production intermédiaire* l_1^1, l'autre à l_3^1 et l_2^3, et la troisième, à l_2^2 et l_3^3, elle se récrira : $q_r = q_r^{(l_1^1)} + q_r^{(l_3^1, l_2^3)} + q_r^{(l_2^2, l_3^3)}$.

Le premier modèle convient à tous les types de travail ; c'est-à-dire, aux différents *métiers* ou *professions*, qui indiquent dans leur dénomination le genre de *biens* qu'ils produisent. Un *métier* peut généralement produire différents *biens*, en mettant en œuvre différentes *technologies*. Mais, si un travailleur *qualifié* dans un *métier* produit plusieurs *biens* au cours de son temps de travail, en général, chacun d'eux recevra des parties distinctes de son temps et celles-ci n'auront pas la même relation à la quantité produite de l'un à l'autre. Pour le capital en revanche, c'est le second modèle qui convient. Les *métiers* utilisent tous leur propres outils et machines. S'il est vrai que la spécialisation de ceux-ci par *biens* produits peut accroître leur productivité, leur polyvalence, ou leur faculté d'aider à produire plusieurs *biens*, est aussi précieuse. Qu'on songe à une machine à coudre, un ordinateur, une fraiseuse ou un four, par exemple, et on en verra tout de suite la polyvalence. Pour les sources d'énergie, le premier modèle semble le mieux adapté. En effet, si une machine sert à produire différents *biens*, en principe, elle ne le fera pas simultanément et la quantité d'énergie qu'elle consommera en fonction de *l'output* sera propre à chacun.

La *ressource* en travail dans un *métier* est la somme de ses parties allouées aux *productions intermédiaires* : $T_m = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n_j=1}^{N_j} T_{n_j}^j, m = 1, .., M$. Chaque partie est supérieure ou égale à 0, selon que le *métier* fournit ou non la *technologie de production intermédiaire* : $T_m > 0 \Rightarrow T_{n_j}^j \geq 0, \forall j = 1, \dots, J, n_j = 1, \dots, N_j$. Elle définit un *input*-travail, quand elle est supérieure à 0. La partie totale allouée à l'*output* j est la somme des parties qui en produisent les *outputs intermédiaires* : $T_m^j = \sum_{n_j}^{j} T_{n_j}^j$. L'intégrité technologique de l'unité doit avoir pour conséquence qu'elle est supérieure à 0 : $T_m > 0 \Rightarrow T_m^j > 0, j = 1, \dots, J, m = 1, \dots, M$. Ça n'est pas une obligation formelle mais un constat qui doit pouvoir se retrouver dans la réalité. La même répartition vaut pour une source d'énergie : $E_s = \sum_{j=1}^{J} \left(E_s^j = \sum_{n_j=1}^{N_j} E_{n_j}^j \right), \forall s = 1, \dots, S$. La liste des *ressources* en capital reprend la liste des *métiers*. Pour chacune, le nombre de parties et l'indice qui les liste se renomment d'après son indice-*métier*, B_m et b_m. Cette *ressource* se réécrit donc $C_m = \sum_{b_m=1}^{B_m} C_m^{P_{b_m}}, m = 1, \dots, M$. Chaque partie est supérieure à 0 et définit un *input*-capital : $C_m > 0 \Rightarrow C_m^{P_{b_r}} > 0, b_m = 1, \dots, B_m$. *L'input*-capital d'une *production intermédiaire* se définit donc comme l'unique partie qui l'a comme élément dans son groupe : $C_{n_j}^j \equiv C_m^{P_{b_m}} : l_{n_j}^j \in P_{b_m}$. La quantité totale de capital par *output* est $C_m^j = \sum C_m^{P_{b_m}} : l_{n_j}^j \in P_{b_m}$. L'intégrité de l'unité doit impliquer qu'elle est supérieure à 0 : $C_m > 0 \Rightarrow C_m^j > 0, j = 1, \dots, J, m = 1, \dots, M$.

Nous notons $\left(C_{m \in [1;M]}^{j \in P_{b_m}} \right)$ le vecteur des *inputs*-capital qui entrent dans la production du *bien* j, ce dernier étant représenté par au moins une de ses *productions intermédiaires* : $\left(C_{m \in [1;M]}^{j \in P_{b_m}} \right) = \left\{ C_m^{P_{b_m}} \in \left(C_1^{P_1}, \dots, C_1^{P_{B_1}}, \dots, C_M^{P_1}, \dots, C_M^{P_{B_M}} \right) : l_j \cap P_{b_m} \neq \emptyset \right\}$. Les parties des *ressources* allouées à chacun des *outputs* forment les vecteurs $\left(T_1^j, \dots, T_M^j, E_1^j, \dots, E_S^j, \left(C_{m \in [1;M]}^{j \in P_{b_m}} \right) \right), j = 1, \dots, J$. Cela n'a d'intérêt qu'en tant que lien entre les *outputs* et le vecteur *d'inputs* x. C'est ce dernier qui nous intéresse. Nous avons réuni une information suffisante pour écrire un *vecteur d'inputs* digne de ce nom : $x = \left(T_1^1, E_1^1, \dots, T_{N_1}^1, E_{N_1}^1, \dots, T_1^J, E_1^J, \dots, T_{N_J}^J, E_{N_J}^J, C_1^{P_1}, \dots, C_1^{P_{A_1}}, \dots, C_M^{P_1}, \dots, C_M^{P_{B_M}} \right)$. Nous en éclaircirons peut-être l'écriture en le reformulant de la manière suivante : $x = \left(\left\{ \left(T_{n_j}^j, E_{n_j}^j \right), n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J \right\}, \left\{ C_m^{P_{b_m}}, b_m = 1, \dots, B_m, m = 1, \dots, M \right\} \right)$. C'est donc un vecteur à $\sum_{j=1}^{J} 2N_j + \sum_{m=1}^{M} B_m$ dimensions. Nous notons x_j le *vecteur d'inputs* de *l'output* y_j : $x_j = \left(T_1^j, E_1^j, \dots, T_{N_j}^j, E_{N_j}^j, \left(C_{m \in [1;M]}^{j \in P_{b_m}} \right) \right), \forall j = 1, \dots, J$. Si on note κ_j, le nombre de ses *inputs*-capital, le nombre *d'inputs* qu'il comporte, I_j, est égal à $2N_j + \kappa_j$. L'*ensemble d'inputs* est donc $X = \left\{ x \in \mathcal{R}_+^{\sum_{j=1}^{J} 2N_j + \sum_{m=1}^{M} B_m} \right\}$, et le sous-ensemble par *bien* j, $X_j = \left\{ x_j \in \mathcal{R}_+^{2N_j + \kappa_j} \right\}$. La somme des dimensions des sous-ensembles peut excéder les dimensions de l'ensemble en raison de la polyvalence des *inputs*-capital : $\sum_{j=1}^{J} (2N_j + \kappa_j) \geq \sum_{j=1}^{J} 2N_j + \sum_{m=1}^{M} B_m$.

2. L'ENSEMBLE DE PRODUCTION

Une *technologie de production* se définit par une *fonction* et un *ensemble de production*. Nous notons $x_{n_j}^{j}$, le trio d'*inputs*-travail, capital et énergie de la $n_j{}^{ème}$ *production intermédiaire* du *bien* j : $x_{n_j}^{j} = \left(T_{n_j}^{j}, C_{n_j}^{j}, E_{n_j}^{j}\right), n_j = 1, \ldots, N_j, j = 1, \ldots, J$, $f_{n_j}^{j}(.)$, sa *fonction de production intermédiaire* et $G_{n_j}^{j}$, l'*ensemble de production intermédiaire* qui la délimite : $G_{n_j}^{j} = \left\{\left(x_{n_j}^{j}, y_{n_j}^{j}\right) \in \mathcal{R}_+^4 : y_{n_j}^{j} \leq f_{n_j}^{j}\left(x_{n_j}^{j}\right)\right\}, n_j = 1, \ldots, N_j, j = 1, \ldots, J$. A ce degré de détail, nous pouvons admettre la nécessité des trois *inputs* : $y_{n_j}^{j} > 0 \Leftrightarrow T_{n_j}^{j}, C_{n_j}^{j}, E_{n_j}^{j} > 0, j = 1, \ldots, J, n_j = 1, \ldots, N_j$, ce qui permettra à $G_{n_j}^{j}$ de débuter le long des axes des *inputs* dans $\mathcal{R}_+^4$. Pour l'instant, nous retenons simplement que la fonction est *continue*. Pour délimiter, à partir de là, chaque *ensemble de production* mono-*output*, il nous reste à évoquer les achats et les ventes de *biens intermédiaires* et à harmoniser les *productions intermédiaires*. Cela fait, nous pourrons étudier les déplacements le long de cette *frontière* en précisant sa pente ou le *taux marginal d'accroissement* de *l'output* maximal.

2.1. MARCHES DE BIENS INTERMEDIAIRES

Comme il est le résultat d'une *technologie* relevant d'un *métier* et *d'inputs* disponibles sur des marchés, tout *bien intermédiaire* d'un *bien* produit est logiquement aussi produit dans les autres *unités de production* de ce *bien*. Toutes ces unités peuvent avoir intérêt à se l'échanger, dès lors que leurs productions les situent à des niveaux différents de *coût marginal*. A ce stade des *contraintes techniques*, nous ne connaissons pas les déterminants de ce coût, mais cette différence de niveau devrait pouvoir tenir sur la seule nécessité d'une *encaisse initiale de monnaie* pour avancer leur *dépense en inputs*. Nous pouvons aussi envisager qu'il soit produit dans des *unités de production* moins complexes, qui ne l'assemblent pas à d'autres, mais le vendent, en tant que tel, aux *unités de production* du *bien*.[18] Nous pouvons donc admettre qu'il peut avoir son marché. Dès lors qu'il a son marché, notre unité a trois possibilités le concernant : le faire produire en son sein pour l'intégrer au *bien* ; l'acheter pour l'intégrer au *bien* ; le faire produire en son sein pour le vendre. La quantité produite en son sein est un *output intermédiaire* et correspond ainsi à une *internalisation* de sa production. La quantité achetée pour être intégrée au *bien* n'est ni un *input*, ni un *output*, puisqu'elle rivalise avec la quantité produite en son sein et correspond donc à une *externalisation* de sa production (puisque celle-ci demeure à travers *l'output* en *bien*). La quantité produite en interne et vendue sur le marché est une source supplémentaire de chiffre d'affaire, par rapport à *l'output* en *bien*. En principe, sa décision d'achat ou de vente dépendra du prix du *bien intermédiaire* et du prix de ses *inputs* (y compris ses *inputs*-matières premières s'il y en a). Elle ne l'achètera que dans la mesure où, compte-tenu de ces prix, sa propre *production intermédiaire* atteindra sa limite de rentabilité tout en restant inférieure à ce que réclame l'*output* y_j et ne le vendra que dans la mesure où, à

[18] En outre, il peut être demandé par des propriétaires du bien (*unités de production* ou particuliers) ou des réparateurs professionnels, en tant que *pièces détachées*.

l'inverse, cette production restera rentable au-delà de ce que réclame cet *output* : autrement dit, elle l'achètera uniquement ou le vendra uniquement. En outre, comme elle n'a pas *d'inputs fixes*, il n'y a pas de raison que les N_j *productions intermédiaires* de chaque *bien j* ne contribuent pas à la rentabilité de ces derniers au moins dans leur commencement, et ne soient donc accomplies chacune en son sein au moins partiellement : ici, il n'y aura *d'externalisation* complète d'aucune de ses *productions intermédiaires* ; ses achats éventuels ne feront que les relayer : $y_j > 0 \Rightarrow y_{n_j}^j > 0, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. On complète ainsi les interdépendances entres les *unités de production*, qui caractérisent tout système productif, en permettant à chacune de vendre de certains *biens intermédiaires* et d'acheter de certains autres, et donc, la détermination des limites de leurs productions par les prix.[19] Cependant, à ce stade, les prix n'interviennent pas encore et nous ne connaissons pas sa décision. Si nous admettions ensemble les deux possibilités et prenions les quantités achetées et vendues pour *données*, nous témoignerions, certes, de cette possibilité, mais donnerions aussi un caractère contingent à notre *frontière de production*, car dépendant de ces *données*. Or, celle-ci doit rester indépendante des prix et refléter uniquement les limites *techniques* de la production de l'unité. Nous n'avons donc pas à les prendre en compte.

Tout *output* se délimite *techniquement* comme le minimum des rapports des *outputs intermédiaires* à leurs *coefficients techniques* respectifs. Les *plans de production* réalisables, formant son *ensemble de production* mono-*output*, se précisent comme suit : $G_j = \left\{ (x_j, y_j) \in \mathcal{R}_+^{2N_j + \kappa_j + 1} : y_j = min \left\{ \frac{y_1^j}{\rho_1^j} ; \dots ; \frac{y_{N_j}^j}{\rho_{N_j}^j} \right\} \right\}, \forall j = 1, \dots, J$. On voit ainsi les deux dimensions de *l'efficacité* de sa production : *l'efficacité* de chacune de ses *productions intermédiaires* ; la mise de celles-ci au même niveau *d'output*. La première resitue la notion habituelle *d'efficacité* productive au niveau *intermédiaire*.[20] Elle se précise comme l'ensemble $\Upsilon_{n_j}^j$ des *plans intermédiaire* de la *frontière intermédiaire* : $\Upsilon_{n_j}^j = \left\{ \left(x_{n_j}^j, y_{n_j}^j \right) \in \mathcal{R}_+^4 : y_{n_j}^j = f_{n_j}^j \left(x_{n_j}^j \right) \right\}, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Elle est nécessaire mais pas suffisante à éviter le gaspillage *d'inputs*.[21] La seconde est la manière précise de relier les *outputs intermédiaires* qui égalise leurs rapports respectifs à leurs *coefficients techniques*. Elle ne relève pas de l'exactitude de

[19] Notre complément se situe dans le cadre d'un *modèle d'équilibre général*, en ce sens qu'il en reprend les hypothèses que les *biens* sont de qualité *standard* et offerts par un grand nombre *d'unités de production*, que chacune de celles-ci est sûre de *sa technologie* et de ses coûts et *preneuse de prix*, que chaque échange y a un coût nul de réalisation et que tout *input* a son marché. Cela exclue les approches des *limites de la firme* dans les termes d'une *économie des coûts de transaction* (COASE, 1937, WILLIAMSON, 1991), d'une *structure informationnelle de la production* (AOKI, 1986) ou de *contrats incitatifs* (BAUDRY, 2005), ou encore, d'une *coopération entre les entreprises* (RAVIX, 1996). Une fois la *technologie* et la liste des *biens* produits (des *métiers*) *données*, les limites de la production sont déterminées par les prix.

[20] La *microéconomie* a défini la *frontière de production* avec la *fonction de production* dès la fin du XIXè siècle (WICKSTEED, 1932) et la *distance* qui sépare tout *plan* de la *frontière de production*, dès les années 1950 (DEBREU, 1951, SHEPHARD, 1953, FARREL, 1957).

[21] Si, par exemple, x_1^j est tel que $f_1^j(x_1^j)/\rho_1^j = 3$ et x_2^j tel que $f_1^j(x_2^j)/\rho_2^j = 2$, alors il est sûr que *l'output* y_j ne pourra atteindre 3 unités et que des unités *d'inputs* de la première seront gaspillées.

l'accomplissement des *technologies de production intermédiaires*, mais de la bonne gestion des acquisitions *d'inputs* par *l'unité de production*.

2.2. La Frontiere de Production

La gestion optimale de ces acquisitions, alors que les prix ne sont pas encore connus, consiste à n'en retenir que celles qui relient les *outputs intermédiaires* par les égalités : $\frac{y_1^j}{\rho_1^j} = \cdots = \frac{y_{N_j}^j}{\rho_{N_j}^j}, j = 1, \dots, J$. Elle se précise grâce aux concepts de *correspondance en inputs* et *d'isoquante*, mais, ici, repensés à travers N_j *frontières de production* par *output*. Une *correspondance en inputs* d'un *output* est l'ensemble des combinaisons *d'inputs* rendant réalisable un niveau *donné* de *l'output* et son *isoquante* est la *frontière* de cet ensemble ; c'est-à-dire, l'ensemble des combinaisons qu'admet comme arguments la *fonction de production* de cet *output* pour atteindre ce niveau. Graphiquement, avec une production à seulement deux *inputs*, son *isoquante* prend la forme de la projection sur le plan horizontal des *inputs* de la *courbe de niveau* horizontale qui parcoure le *graphe* de la fonction. Pour nous, la *correspondance en inputs de l'output* sera surtout une équivalence des *outputs intermédiaires* entre eux et ce ne sera pas un contresens que de la penser comme une fonction en laissant varier *l'output*. Elle traduit l'adaptation *continue* à *l'output* de la délimitation des acquisitions de ses *inputs*. La *correspondance en inputs* d'un *output* est l'ensemble des vecteurs *d'inputs* qui rend possible cette égalité ou la fonction $L_j(.)$ suivante : $L_j(y_j) = \left\{x_j \in \mathcal{R}_+^{2N_j+\kappa_j} : f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right) \geq \rho_{n_j}^j y_j, \forall n_j \in [1; N_j]\right\}, j = 1, \dots, J$. C'est son *isoquante* qui nous intéresse. Notons-la $L_j^*(.)$. C'en est le sous-ensemble qui réalise cette égalité moyennant, en plus, *l'efficacité* des *productions intermédiaires* : $L_j^*(y_j) = \left\{x_j \in L_j(y_j) : y_{n_j}^j = f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right) = \rho_{n_j}^j y_j, \forall n_j \in [1; N_j]\right\}, j = 1, \dots, J$. C'est l'état achevé de *l'efficacité technique* de la production d'un *output*. Elle constitue l'*isoquante* de tout niveau de *l'output*, ou l'ensemble Υ_j des *plans* de sa *frontière de production* : $\Upsilon_j = \left\{(x_j, y_j) \in \mathcal{R}_+^{2N_j+\kappa_j} : x_j \in L_j^*(y_j)\right\}, j = 1, \dots, J$.

Comme elle ne délimite pas un vecteur *d'inputs*, mais un ensemble de vecteurs, elle doit être secondée par une *fonction de production* de *l'output* pour délimiter la *frontière de production*, mais pas au sens habituel. Notons cette fonction $\gamma_j(.)$. Elle sera bien fondée sur la cohérence *technologique* de la production du *bien j*, à travers la nécessité, *l'efficacité* intrinsèque et *l'harmonisation* de toutes ses *productions intermédiaires*, mais son domaine de définition sera limité à cet ensemble. De ce fait, elle aura un caractère variable avec *l'output* donc et quelque peu redondant, et n'identifiera pas tant le maximum *d'output* à tirer d'un vecteur *d'inputs* qu'un minimum *d'inputs* nécessaires à un *output*. Ce sera donc l'application suivante : $\gamma_j(.), L_j^*(y_j) \to \mathcal{R}_+ : \gamma_j^*(x_j) = \frac{f_1^j(x_1^j)}{\rho_1^j} = \cdots = \frac{f_{N_j}^j(x_{N_j}^j)}{\rho_{N_j}^j} = y_j, j = 1, \dots, J$. Comme la *frontière* de G est la réunion des J *frontières* mono-*output*, $\Upsilon = \bigcup_{j=1}^J \Upsilon_j$, nous pouvons même, si nous voulons, utiliser la fonction $\varphi(.)$ pour la parcourir, bien que celle-ci n'ait pas le sens d'une *fonction de production*, puisqu'il n'y a pas de *technologie de pro-*

duction pluri-*outputs* à proprement parler dans l'unité. Il suffit de limiter son domaine de définition à $L^*(y) = \left(L_1^*(y_1), \dots, L_J^*(y_J)\right)$, et de la préciser comme suit : $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{J}\left[y_j - \gamma_j(x_j)\right]$, ce qui aura pour effet de l'annuler systématiquement : $\varphi(x,y) = 0$. Voyons maintenant comment varie un *output* le long de sa *frontière*.

2.3. TAUX MARGINAL D'ACCROISSEMENT D'UN *OUTPUT*

Le long de sa *frontière de production*, solidarisés par la fonction-*isoquante* $L_j^*(.)$, les *inputs* de tout *output* y_j fonctionnent un peu comme un seul et même *input*. Aucun accroissement de l'un ne peut apporter d'accroissement de *l'output* sans que tout ou partie des autres n'ait à varier aussi. Pour définir commodément ces variations mutuellement *efficaces*, il faut se placer en un point quelconque de la *frontière*. Nous choisissons le point $(\dot{x}_j, \dot{y}_j)$, défini donc par $\dot{x}_j \in L_j^*(\dot{y}_j)$; c'est-à-dire, l'ensemble des N_j *plans de production intermédiaire*, $\left(\dot{x}_{n_j}^j, \dot{y}_{n_j}^j\right), n_j = 1, \dots, N_j$, tels que $\dot{y}_{n_j}^j = f_{n_j}^j\left(\dot{x}_{n_j}^j\right) = \rho_{n_j}^j \dot{y}_j, n_j = 1, \dots, N_j$. Maintenant, envisageons deux déplacements le long de la *frontière* depuis ce point ; d'abord, un « saut », puis, un accroissement infime qui traduit sa *continuité*.

De façon générale, face à tout accroissement envisagé de *l'output* $\Delta y_j > 0$, depuis ce point, la fonction $L_j^*(.)$ détermine le changement *d'isoquante* en ajustant les *inputs* de *l'output* à travers la sélection de l'ensemble de leurs variations possibles, Δx_j, qui relient ce point à tous les points de la nouvelle *isoquante*. Ces variations ont un signe indéterminé. Par exemple, si $\dot{x}_j$ est tel que *l'output intermédiaire* $\dot{y}_1^j$ s'obtient d'un triplé $\dot{x}_1^j$ composé de « beaucoup » *d'input*-travail et de « peu » *d'inputs*-capital et énergie, pour rejoindre un point de la nouvelle *isoquante* où, au contraire, il s'obtient d'un triplé composé de « peu » *d'input*-travail et de « beaucoup » *d'inputs*-capital et énergie, il faudra peut-être une diminution du premier et une augmentation des seconds. Notons $\hat{\Delta} y_{n_j}^j$ toute variation *efficace* de tout *output intermédiaire* depuis $\dot{y}_{n_j}^j$, le long de la *frontière de production intermédiaire*, induite par une variation quelconque $\Delta x_{n_j}^j$ de ses *inputs* : $\hat{\Delta} y_{n_j}^j = f_{n_j}^j\left(\Delta x_{n_j}^j + \dot{x}_{n_j}^j\right) - f_{n_j}^j\left(\dot{x}_{n_j}^j\right), n_j = 1, \dots, N_j$. La fonction-*isoquante* sélectionne, en tenant compte de la polyvalence des *inputs*-capital, les variations possibles des *inputs* donnant des variations *efficaces* égales chacune au produit de leur c*oefficient technique* et de l'accroissement recherché de *l'output* et donc, l'ensemble suivant : $L_j^*(\Delta y_j) = \left\{\Delta x_j \in \mathcal{R}^{2N_j + \kappa_j} : \hat{\Delta} y_{n_j}^j = \rho_{n_j}^j \Delta y_j, n_j = 1, \dots, N_j\right\}$, ce qui donne bien pour résultats $L_j^*(\dot{y}_j) + L_j^*(\Delta y_j) = L_j^*(\dot{y}_j + \Delta y_j)$ et $\gamma_j\left(x_j \in L_j^*(\dot{y}_j + \Delta y_j)\right) - \gamma_j(\dot{x}_j) = \Delta y_j$.

Le saut le long de la *frontière* peut se faire à partir d'un *input*. Choisissons l'*input*-travail $\dot{T}_{n_j}^j$ et son accroissement $\Delta T_{n_j}^j$, qui induit un accroissement *efficace* de *l'output intermédiaire* qu'il produit $\hat{\Delta} y_{n_j}^j = f_{n_j}^j\left(\dot{T}_{n_j}^j + \Delta T_{n_j}^j, \dot{C}_{n_j}^j, \dot{E}_{n_j}^j\right) - f_{n_j}^j\left(\dot{x}_{n_j}^j\right)$ et donc, un accroissement potentiel de *l'output* égal à $\frac{1}{\rho_{n_j}^j} \hat{\Delta} y_{n_j}^j$. La fonction-*isoquante* complète l'état $\left(\dot{T}^{j}_{n_j} + \Delta T^{j}_{n_j}, \dot{C}^{j}_{n_j}, \dot{E}^{j}_{n_j}\right)$ du triplé $x^{j}_{n_j}$ sur la nouvelle *isoquante* et sélectionne l'ensemble des variations possibles des *inputs* des autres *productions intermédiaires* qui portent leurs *outputs intermédiaires* sur celle-ci. Nous listons par l'indice $-n_j$ ces autres *productions intermédiaires*. Sa sélection est donc : $L^{*}_{j}\left(\frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}}\right) = \left\{\Delta x_j \in \mathcal{R}^{2N_j+\kappa_j} : \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{-n_j}}{\rho^{j}_{-n_j}} = \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}}, \forall -n_j \in [1; n_j - 1] \cup [n_j + 1; N_j]\right\}$, ce qui donne $L^{*}_{j}(\dot{y}_j) + L^{*}_{j}\left(\frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}}\right) = L^{*}_{j}\left(\dot{y}_j + \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}}\right)$ et $\gamma_j\left(x_j \in L^{*}_{j}\left(\dot{y}_j + \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}}\right)\right) - \gamma_j(\dot{x}_j) = \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}}$. Les mêmes résultats valent pour un *input*-énergie.

Pour un *input*-capital de *l'output*, $C^{P_{bm}}_{m} : l_j \cap P_{b_m} \neq \emptyset$, effectivement *polyvalent*, peut intervenir un choix d'accroissement de *l'output*. Son accroissement induit un ensemble, qu'on note $\left(\hat{\Delta} y^{P_{bm}}_{m}\right)$, d'accroissements des *outputs intermédiaires* pour lesquels il est utilisé : $\left(\hat{\Delta} y^{P_{bm}}_{m}\right) = \left\{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j} = f^{j}_{n_j}\left(\dot{T}^{j}_{n_j}, \dot{C}^{P_{bm}}_{m} + \Delta C^{P_{bm}}_{m}, \dot{E}^{j}_{n_j}\right) - f^{j}_{n_j}\left(\dot{x}^{j}_{n_j}\right) : l^{j}_{n_j} \in P_{b_m}\right\}$. Si un seul concerne y_j, son accroissement suffit à déterminer la sélection de la fonction $L^{*}_{j}(.)$ comme pour un *input*-travail ou un *input*-énergie. Si plusieurs le concernent, leurs accroissement définissent un ensemble d'accroissement potentiels de y_j, qu'on note $\left(\hat{\Delta} y_j\left(\Delta C^{P_{bm}}_{m}\right)\right)$, défini comme suit : $\left(\hat{\Delta} y_j\left(\Delta C^{P_{bm}}_{m}\right)\right) = \left\{\frac{\hat{\Delta} y^{j}_{n_j}}{\rho^{j}_{n_j}} : l^{j}_{n_j} \in l_j \cap P_{b_m}\right\}$. Il faut faire un choix dans cet ensemble. Ce choix est libre. La fonction-*isoquante* $L^{*}_{j}(.)$, peut utiliser n'importe quel élément de $\left(\hat{\Delta} y_j\left(\Delta C^{P_{bm}}_{m}\right)\right)$ pour définir la nouvelle *isoquante* et corriger les autres éléments à partir de leurs *inputs*-travail et énergie, en même temps que les *inputs* des autres *productions intermédiaires*, à travers la sélection de l'ensemble des variation possibles des *inputs* Δx_i qui relient $(\dot{x}_j, \dot{y}_j)$ à tous les points de cette nouvelle *isoquante*. Nous notons $\breve{n}_j$ l'indice de *l'output intermédiaire* retenu : $\breve{n}_j = n_j \in [1; N_j] : \hat{\Delta} y^{j}_{\breve{n}_j} \in \left(\hat{\Delta} y_j\left(\Delta C^{P_{bm}}_{m}\right)\right)$. Sa sélection est donc la suivante : $L^{*}_{j}\left(\frac{\hat{\Delta} y^{j}_{\breve{n}_j}}{\rho^{j}_{\breve{n}_j}}\right) = \left\{\Delta x_j \in \mathcal{R}^{2N_j+\kappa_j} : \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{-n_j}}{\rho^{j}_{-n_j}} = \frac{\hat{\Delta} y^{j}_{\breve{n}_j}}{\rho^{j}_{\breve{n}_j}}, \forall -n_j \in [1; \breve{n}_j - 1] \cup [\breve{n}_j + 1; N_j]\right\}$.

Les déplacements dans la *continuité* de la *frontière* se font à travers des accroissements tendant vers 0. Lorsque nous faisons tendre l'accroissement de *l'input* vers 0, nous constatons que le *taux marginal d'accroissement* de *l'output*, ou la pente de la *frontière* de G_j ; c'est-à-dire, la dérivée en $(\dot{x}_j, \dot{y}_j)$ de la fonction $\gamma_j(.)$ par rapport à *l'input*, est égale au rapport de la dérivée de la *fonction de production intermédiaire* dont relève plus précisément cet *input* à son *coefficient technique*. Dans le cas de *l'input*-travail, nous constatons, en effet, l'égalité suivante.

$$\lim_{\Delta T_{n_j}^j \to 0} \left\{ \frac{\gamma_j\left(x_j \in L_j^*\left(\dot{y}_j + \dfrac{\widehat{\Delta} y_{n_j}^j}{\rho_{n_j}^j}\right)\right) - \gamma_j(\dot{x}_j)}{\Delta T_{n_j}^j} \right\} = \lim_{\Delta T_{n_j}^j \to 0} \left\{ \frac{1}{\rho_{n_j}^j} \cdot \frac{\widehat{\Delta} y_{n_j}^j}{\Delta T_{n_j}^j} \right\}$$

Ce qui revient à constater l'égalité suivante.

$$\frac{dy_j}{dT_{n_j}^j} = \frac{\partial \gamma_j(\dot{x}_j)}{\partial T_{n_j}^j} = \frac{1}{\rho_{n_j}^j} \cdot \frac{\partial f_{n_j}^j\left(\dot{x}_{n_j}^j\right)}{\partial T_{n_j}^j}, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$$

Le même résultat vaut pour *l'input*-énergie : $\frac{dy_j}{dT_{n_j}^j} = \frac{\partial \gamma_j^*(\dot{x}_j)}{\partial E_{n_j}^j} = \frac{1}{\rho_{n_j}^j} \cdot \frac{\partial f_{n_j}^j\left(\dot{x}_{n_j}^j\right)}{\partial E_{n_j}^j}, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Pour l'*input*-capital, peut simplement intervenir le choix de dérivée : $\frac{dy_j}{dC_m^{P_{b_m}}} = \frac{\partial \gamma_j^*(\dot{x}_j)}{\partial C_m^{P_{b_m}}} = \frac{1}{\rho_{\tilde{n}_j}^j} \cdot \frac{\partial f_{\tilde{n}_j}^j\left(\dot{x}_{\tilde{n}_j}^j\right)}{\partial C_m^{P_{b_m}}}, b_m = 1, \dots, B_m, m = 1, \dots, M$. La pente de la *frontière de* G_j est donc le rapport de celle de $G_{n_j}^j$ à $\rho_{n_j}^j$.

Nous avons ainsi précisé *l'ensemble de production* et sa *frontière*. Il nous reste à préciser et expliquer sa *convexité*.

3. LA *FONCTION DE PRODUCTION INTERMEDIAIRE*

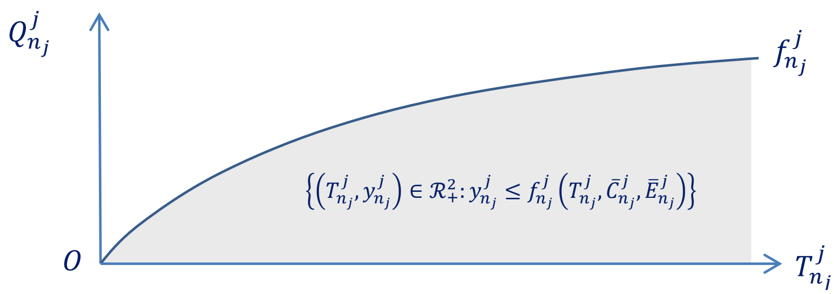
Nous avons décomposé G en J ensembles mono-*output*, $G_j, j = 1, \dots, J$, dont la somme des dimensions peut dépasser celles de G du fait de la polyvalence des *inputs*-capital (celles en sus disparaissent donc dans leur union). Nous avons alimenté ces ensembles avec un nombre $\sum_{j=1}^{J} N_j$ *d'ensembles de production intermédiaire*, qui, réunis, forment un ensemble plus vaste que G, que nous notons F, qui constitue la base de la production de notre unité : $F = \bigcup_{j=1}^{J} \bigcup_{n_j=1}^{N_j} G_{n_j}^j$. Il est plus vaste ($G \subset F$), parce qu'il a plus de dimensions et ne voit aucun de ses *outputs intermédiaires* disparaitre en partie dans le décompte des *outputs* faute de ne pas respecter les contraintes *d'harmonisation* des *productions intermédiaires*. La *frontière* de G est la réunion des J *frontières* mono-*output* et chacune de celles-ci est la réunion des N_j *frontières* des *ensembles de production intermédiaire* de *l'output*. En effet, la fonction-*isoquante* de la *correspondance en inputs* de *l'output* « balaiera » la totalité de ces dernières à travers les valeurs possibles de *l'output*, de 0 à l'infini. Cette précision ne modifie donc pas les propriétés de G à condition que les *ensembles de production intermédiaire* les aient aussi. Nous allons donc les leur donner. Seulement, c'est une chose de les leur donner par hypothèse, c'en est une autre de les comprendre. Nous verrons graphiquement ce qu'elles signifient et constaterons que celle de la *convexité* reste largement inexpliquée sans explicitation des relations techniques entre leurs trois *inputs*. Nous allons donc, ensuite, proposer cette explicitation en nous servant de postulats déjà très présents dans la *microéconomie* ou d'une portée si générale qu'ils confinent à l'évidence. Cela fait, nous pourrons mettre en lumières les conditions sur ces relations qui induisent la *convexité* et, de là, apprécier leur plausibilité.

3.1. CONVEXITE DE L'ENSEMBLE DE PRODUCTION

Les propriétés des *ensembles de production intermédiaires* se rapportent à leurs *fonctions de production intermédiaire*. Compte-tenu des autres propriétés, le début de leur *production intermédiaire* ne nécessite aucun rassemblement *d'inputs* au préalable, ayant donc un caractère *fixe*, si les *graphes* de leurs fonctions débutent en *l'origine*. Nous posons donc : $f_{n_j}^j(0{,}0{,}0) = 0, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Nous avons même étendu le domaine des images nulles de leurs fonctions à travers la nécessité des trois *inputs* : $\left\{x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3 : f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right) = 0\right\} = \left\{x_{n_j}^j : 1 \; ou \; 2 \; ou \; 3 \; inputs = 0\right\}, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Leur *fermeture* implique que leurs fonctions sont *continues* et qu'elles délimitent des *plans* réalisables : $Y_{n_j}^j \subset G_{n_j}^j, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Leur *monotonicité* implique que leurs fonctions ne peuvent être *croissantes*, sur certaines parties de leur *domaine de définition* ($\mathcal{R}_+^3$), et *décroissantes*, sur d'autres. Comme toute *décroissance* ou *constance* de leurs fonctions avec un *input* délimiterait une zone d'inutilité de l'accroissement de *l'input* et donc, une *discontinuité* dans leur *frontière* au sens économique, il est plus simple qu'elles soient *strictement croissantes*. Nous posons donc : $\frac{\partial f_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j}, \frac{\partial f_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j}, \frac{\partial f_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j} > 0, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3, n_j = 1 \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Enfin, leur *convexité* implique que leurs fonctions sont *concaves*. Elle peut être *stricte* ou non-*stricte*. Le cas non-*strict* est le plus général. On admet donc que leurs dérivées secondes sont négatives au sens où elles finissent toujours par être inférieures à 0 après avoir été nulles s'il leur arrive d'être nulles : $\frac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial T_{n_j}^j}, \frac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j \partial C_{n_j}^j}, \frac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j \partial E_{n_j}^j} \leqq 0, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Il ne nous reste plus qu'à découvrir en image ce que signifient ces propriétés. Un graphique en deux dimensions sera le plus lisible. Pour le tracer, il suffit de choisir l'un d'eux, de fixer deux des quatre variables que forment ses trois *inputs* et son *output intermédiaire* et de montrer l'évolution des deux autres l'une par rapport à l'autre. Si nous fixons *l'output intermédiaire* et un *input* et laissons varier les deux autres *inputs*, nous traçons une *isoquante* partielle. La *continuité* et la *concavité* de la fonction se verront alors par la *continuité* et la *convexité* de *l'isoquante*. Cela implique, d'abord, qu'en tout point de l'*isoquante*, une augmentation d'un *input* peut se substituer à une partie de l'autre et permettre d'atteindre un autre point de *l'isoquante*, ce qui s'explique par le fait que ce sont deux *substituts*. Cela implique, ensuite, la baisse de la capacité de substitution de chaque *input*, que l'augmentation de l'un doit être de plus en plus forte pour se substituer à une même quantité de l'autre à mesure que celui-ci diminue (que le *taux marginal de substitution* de l'un à l'autre décroît lorsque l'autre diminue). Cela, en revanche, ne s'explique pas par leur substituabilité. Cet autre phénomène sera mieux mis en évidence, en laissant varier *l'output* et en fixant deux *inputs*. Choisissons de fixer les *inputs*-capital et énergie :

$C^j_{n_j} = \bar{C}^j_{n_j} > 0, E^j_{n_j} = \bar{E}^j_{n_j} > 0$, et montrons la relation entre *l'output intermédiaire* et son *input*-travail sous la forme du graphique suivant.

La (*stricte*) *concavité* de la *fonction de production intermédiaire*



Cette courbe est, en fait, la *projection* de la *vue en coupe* du *graphe* de $f^j_{n_j}(.)$ sur le plan $T^j_{n_j}OQ^j_{n_j}$, avec ces valeurs des *inputs*-capital et énergie. La partie située dessous est la *projection* de *l'ensemble de production intermédiaire*. Nous voyons ce qui cause la baisse de la capacité de substitution : une *décroissance* de la pente supérieure à 0 de sa tangente à mesure que $T^j_{n_j}$ augmente ; autrement dit, de la dérivée de la fonction par rapport à $T^j_{n_j}$, ou du *taux marginal d'accroissement* de *l'output intermédiaire*, ou encore, de la *productivité marginale* de cet *input*-travail (en multipliant cette dérivée ou ce taux par le petit accroissement $dT^j_{n_j}$). Plus exactement, comme notre logiciel de dessin nous a conduits à une *concavité stricte* de la fonction sur cette première partie de son *domaine de définition*, nous voyons une *décroissance stricte*. Si nous avions laissé varier *l'input*-capital et fixé les *inputs*-travail et énergie, nous aurions pu tenter une explication de ce phénomène par la constance du contenu *technologique* de ce dernier et la constance de son *input*-énergie. En effet, pour expliquer que la productivité d'une unité supplémentaires de $C^j_{n_j}$ décroît, nous aurions remarqué que la *continuité* de la courbe implique la constance de son contenu *technologique* – un *progrès technologique* au cours de son grossissement se traduirait par un retraçage plus haut de la courbe (une augmentation de ses dérivées) – et que la constance de son *input*-énergie implique que l'intensité de son fonctionnement doit diminuer au cours de son grossissement. Si nous avions laissé varier *l'input*-énergie et fixé les *inputs*-travail et capital, nous aurions pu aussi tenter une explication. En augmentant, *l'input*-énergie permet à *l'input*-capital de travailler davantage à importance égale, par l'intensification de son fonctionnement. Nous aurions avancé que la productivité d'une unité supplémentaire de $E^j_{n_j}$ décroît par le fait qu'un même gain de travail de son *input*-capital a une productivité décroissante ou constante et nécessite une consommation croissante. Mais, là, en choisissant *l'input*-travail, nous nous sommes mis dans une impasse. L'explication semble plus que difficile : $T^j_{n_j}$ mesure une accumulation *d'heures* de travail dans un certain *métier*, à travers *l'emploi* d'un certain effectif de *salariés* ; comment pouvons-nous expliquer que la productivité de chacune, de la première à la dernière, décroît ? Si ce temps n'était qu'individuel, la première explication qui viendrait à l'esprit serait la fatigue, mais ce serait déjà très discutable, car, dans la réalité, un *salarié* qui manifesterait sa fatigue aussi directement et régulièrement dans sa production se singulariserait éminemment : la situation normale est plutôt qu'il se doit de maintenir sa *productivité horaire* et qu'il paie sa fatigue en efforts supplémentaires pour pouvoir y arriver, bien avant de devoir éventuellement y renoncer. Mais, de toute façon, ce temps est normalement collectif. Les deux interprétations qui restent en termes de fatigue sont, la première, que les *salariés* se relaient tous sur un même *poste individuel* et, non seulement, vivent chacun leur fatigue de cette manière si singulière, mais en plus, se la transmettent les uns aux autres comme un virus ; la seconde, qu'ils travaillent tous si bien en symbiose sur un même *poste collectif* que toute partie de ce temps de travail, aussi infime soit-elle, se compose, en fait, d'autant de parties qu'ils sont d'individus (inégales, si leurs temps individuels sont inégaux), qu'ils en viennent ainsi à ne plus former qu'un seul « travailleur collectif » et que ce travailleur, de nouveau, se fatigue de cette manière si singulière.[22] Inutile d'insister : par quelque bout qu'on la prenne, l'explication en termes de fatigue tourne court. La seule autre piste d'explication proprement humaine qui reste est celle qui place les *salariés* sous la *direction* d'un *entrepreneur* et admet la constance du *temps de direction* de ce dernier, de façon à dégager l'argument que *l'efficacité* de sa *direction* doit décroître à mesure que *l'input*-travail augmente. Mais elle tourne court elle aussi. L'influence de cette *direction* se verrait par un autre phénomène que notre courbe. Allons dans ce sens et admettons que ce *temps de direction* pour notre *production intermédiaire* soit un *paramètre* $t_{n_j}^{j} > 0$. Comme cette *direction* consisterait en un enseignement de ce qui échappe de la *technologie de production intermédiaire* aux *salariés* (qui ensuite en auraient la mémoire puisqu'ils sont *qualifiés*), tout ce que nous pouvons raisonnablement en faire, c'est un *paramètre d'environnement* qui modifie la relation entre *l'output intermédiaire* et son triplé $x_{n_j}^{j}$.[23] L'équation de la *frontière de production intermédiaire* deviendrait donc $y_{n_j}^{j} = f_{n_j}^{j}\left(x_{n_j}^{j}; t_{n_j}^{j}\right)$. Nous n'y gagnerions qu'une modification de la productivité de toutes les unités de travail, à travers le retraçage plus haut ou plus bas de notre *projection* du *graphe* de $f_{n_j}^{j}(.)$, à chaque changement du *paramètre* $t_{n_j}^{j}$: notre problème d'explication resterait entier. Rappelons, en outre, à cette occasion, que la présence d'un *entrepreneur*, qui possède et dirige *l'entreprise* et empoche son *profit*, pose un certain nombre de problèmes techniques au *modèle de l'équilibre général* : l'impossibilité de lui attribuer une *fonction d'utilité* et d'introduire son temps de *direction*, à la fois, dans celle-ci et la *fonction de production*, sans remettre en cause le but de la maximisation du profit (celui-ci

[22] Encore une expression que nous utilisons sans référence au Capital de MARX, où elle désigne une forme *d'économie d'échelle* de la production fondée sur la coopération des travailleurs qui découlerait de leur *naturel social* (*Livre I*, *section 4*, *chapitre XIII*).

[23] La *direction* de travailleurs n'est nécessaire pour que ceux-ci arrivent à produire que s'ils sont *non-qualifiés* (*dépendants* d'un *encadrement*), ce qui n'est pas l'hypothèse retenue en *microéconomie*. Elle se justifie sinon quand *l'output* et sa *technologie* ont un caractère *spécifique*, ce qui ne l'est pas non-plus (du moins, dans le *modèle de l'équilibre général*).

étant dès lors subordonné à son arbitrage entre *consommation* et *loisir*) ;[24] l'impossibilité, pour lui, de consommer les *profits* de toute période au cours de ladite période (à cause de la simultanéité des marchés). Dans les manuels, elle n'est donc, au mieux, qu'admise par principe, sans introduire, ni sa *fonction d'utilité*, ni son temps de travail dans la *fonction de production*, ne serait-ce qu'à l'état de *donnée*.[25] Si l'explication proprement humaine n'aboutit pas, alors c'est qu'il faut se tourner vers les machines. Remarquons que l'allongement de $T_{n_j}^j$, alors que les *inputs*-capital et énergie sont fixes, doit pouvoir s'interpréter comme une baisse du *degré de mécanisation* de la production. Cela semble la bonne piste, mais il nous faudrait l'explicitation de $f_{n_j}^j(.)$ qui définit clairement cette *variable* et le canal par lequel elle agit, pour la suivre. En eux-mêmes, les rapports à $T_{n_j}^j$ de $C_{n_j}^j$ et $E_{n_j}^j$ ne sont que des quantités de capital et d'énergie par unité de travail : ils ne sont pas susceptibles d'expliquer ce phénomène.

3.2. EXPLICITATION DE LA *PRODUCTION INTERMEDIAIRE*

La *microéconomie* n'a jamais avancé de forme fonctionnelle théorique générale explicitant les relations techniques entre des *inputs* qui leur permettent de générer efficacement un *output*. Il n'est encore jamais apparu que cela répondait à une nécessité. Les seules formes fonctionnelles avancées sont *économétriques*, qui plus est, *macroéconomique* dans leur paramétrage empirique le plus souvent.[26] Ce sont des formes numériques, ayant les propriétés recherchées et utilisées pour approximer des séries statistiques, mais plus ou moins absconses sur le plan théorique. Pour comprendre la différence de statut *épistémologique* entre cette forme générale et ces formes *économétriques*, il suffit de comprendre qu'elle devra être générique ; c'est-à-dire, définir la logique générale de combinaison et les englober toutes. Nous espérons avoir montré qu'une telle nécessité existe et tient à l'explication de la *convexité* de *l'ensemble de production*. Chaque *fonction de production intermédiaire* ne nous laisse qu'un trio *d'inputs*-travail, capital et énergie. Compte-tenu du caractère humain de la production et que nous avons pressenti la pertinence des nouvelles *variables* que seraient le *travail du capital* et le *degré de mécanisation de la*

---

[24] Revenons au modèle *néoclassique* originel. Si, comme pour les autres *inputs*, la dérivée de la *fonction de production* $\gamma(.)$ par rapport à son temps de direction est supérieure à 0 et la dérivée seconde, négative, le profit maximum s'obtient pour le temps de direction égal à son temps disponible : or, il est peu vraisemblable qu'il travaille tout ce temps, car c'est une hypothèse qui tient à sa pauvreté ou un besoin de consommation tel qu'il y sacrifie tout son loisir. Si, pour son temps exceptionnellement, la dérivée est positive et décroît jusqu'à s'annuler avant d'atteindre son temps disponible, puis devient inférieure à 0, le profit est maximum pour le temps qui l'annule. Or, il est encore peu vraisemblable qu'il choisisse ce temps, car, dès lors que son *utilité* croît avec sa *consommation* et son *loisir*, chaque unité de temps de direction supplémentaire doit être compensée par davantage de profit, ce qui l'amènera à choisir un temps inférieur (SCITOVSZKI, 1943).

[25] Pour éviter la thésaurisation des profits, ARROW et DEBREU (1954) lui préfèrent une *redistribution du profit* de chaque entreprise à tous les consommateurs.

[26] WICKSTEED (1932), le premier, introduit la *fonction de production*, en 1894, pour expliciter la *théorie marginaliste* de la répartition de la valeur entre les rémunérations des facteurs à partir de son *homogénéité de degré 1*. COBB et DOUGLAS créent la rupture, en 1928, en avançant une forme fonctionnelle *agrégée*, repoussant la vérification de cette théorie au plan *macroéconomique* (FRUIT, 1962). Depuis, cette fonction *agrégée* est devenue très présente en *macroéconomie*.

production, il ne nous reste plus grand-chose à faire pour lui donner une forme générique. Il nous suffit de prolonger l'hypothèse forte, déjà présente en *microéconomie*, de la constance de *l'efficacité du travail*.[27]

On parle *d'efficacité* du travail, quand il n'est pas encore question de sa *productivité* : on désigne ainsi le travail contenu dans un *input*-travail. Cette hypothèse signifie que ce travail est simplement proportionnel à *l'input* ; autrement dit, que le travail par unité de *l'input* (horaire) ne varie pas avec *l'input* (le temps de travail), ni avec la personnalité des travailleurs qui l'apportent. C'est une hypothèse très simplificatrice qui, néanmoins, force des traits bien présents dans réalité : la convention-même du *salariat*, qui mesure le travail en heures et lui attribue un *salaire horaire minimum* commun selon le *niveau de qualification* ; le maintien de la production par intervalles de temps réguliers, qui est une exigence dans les *unités de production* réelles (dès lors que leur besoin de production ne faiblit pas à emploi égal) ; la *qualification* dans le *métier*, qui tend à normaliser le travail. C'est une hypothèse nécessaire pour que tout *métier* soit au centre d'un marché concurrentiel et rémunéré à un *taux de salaire* unique résultant de *la loi de l'offre et de la demande*. La *microéconomie de la production* ne s'en est passée qu'en de rares occasions, périphériques par rapport à son sujet qu'est *l'équilibre général*.[28] Nous pouvons maintenant en prolonger le sens pour notre *unité de production* en la mettant en résonnance avec le caractère humain de la production et donc, le caractère premier du travail humain. Si celui-ci est premier et si son *efficacité* est constante, alors c'est que *l'output intermédiaire* doit s'exprimer comme le produit de son *input*-travail et d'une *production par unité d'input-travail* (*horaire*).[29] Si nous notons celle-ci $u^j_{n_j}$, notre explicitation débutera donc par $y^j_{n_j} = T^j_{n_j} u^j_{n_j}$. De même que $y^j_{n_j}$ est délimitée par $f^j_{n_j}(.)$, $u^j_{n_j}$ doit être délimitée par une *fonction de productivité du travail*. Notons-la $g^j_{n_j}(.)$. Bien que nous n'ayons pas encore ses arguments, nous pouvons poser $u^j_{n_j} \leq g^j_{n_j}(.)$ et continuer notre explicitation par $f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right) \equiv T^j_{n_j}. g^j_{n_j}(.)$. Sans encore parler de ses autres propriétés, il est impératif que $g^j_{n_j}(.)$ débute en *l'origine* et soit *continue* pour que $f^j_{n_j}(.)$ conserve ces mêmes propriétés.

---

[27] Nous cherchons ici à décrire un *processus de production élémentaire*, dont le principe de la nécessité est, par exemple, défendu par TRIOLAIRE (1994, p. 136) et DUPRAT (1983, p. 79).

[28] Des modèles de décision de la *durée du travail*, incompatible avec la *théorie du consommateur*, dans laquelle c'est à celui-ci de définir son *temps de travail*, mais spécifiquement conçus pour éclairer les *politiques de réduction de la durée légale du travail*, ont fait varier cette *efficacité* avec cette durée (L'HORTY et RAULT, 2002, CAHUC et ZYLBERBERG, 2001). Les modèles *d'équilibre partiel* d'un *marché du travail imparfaitement concurrentiel*, qui ont constitué le champ de la *microéconomie du chômage* (CAHUC et ZYLBERBERG, 2001, GAZIER, 1992, LESUEUR et SABATIER, 2008), en tronquant la modélisation (focalisation sur un *marché du travail* en particulier par l'hypothèse que tous les autres marchés de l'économie ont déjà établi leurs prix, fixation locale de son prix par les *unités de production*, définition de ce prix comme le *salaire* de par la normalisation de *l'offre de travail* de tous les *consommateurs* qui y font une *offre*) ont fait varier cette *efficacité* avec le *salaire* (AKERLOF et YELLEN, 1986).

[29] Evitons la notion souvent usitée de *productivité horaire* (ou *par tête*), puisqu'il n'y a qu'une notion de *productivité du travail* qui peut se mesurer par une *production horaire* (ou *par tête*).

Cette nouvelle fonction doit dépendre d'une variable qui ne peut être *l'efficacité du travail*. Etant une *donnée*, celle-ci la définit intrinsèquement dans sa relation à cette autre variable. C'est là que nous pouvons introduire le *degré de mécanisation*. La croissance de la *productivité du travail* avec le *degré de mécanisation* de la production est un fait difficilement contestable, car au principe-même du développement économique. C'est, à la fois, un fait macro-historique, relatif, par exemple, à la manière dont la *machine à vapeur* (WATT) a pu lancer la *révolution industrielle*, et un fait local et présent, dont décide chaque entreprise à chaque investissement. Nous introduisons donc ce degré comme une variable $D^j_{n_j}$ définie sur $\mathcal{R}_+$. Notre explicitation en devient : $f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right) \equiv T^j_{n_j}.\, g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)$. Si on se contente d'apprécier ce degré comme le rapport du capital qui se combine au travail à celui-ci, on obtient un ratio trop frustre pour expliquer la *productivité du travail*. Si on reconnaît que la contribution du capital à la production a aussi la consistance d'un travail jusqu'à expliciter ce travail comme une variable $\Gamma^j_{n_j}$ et à relier cette variable au capital par une fonction spécifique, on précise ce degré comme le rapport du *travail du capital* au travail humain et on enrichit cette explication des effets des variables en sus du capital arguments de cette fonction et des effets des propriétés de cette fonction elle-même. Notre *variable* devient donc $D^j_{n_j} = \Gamma^j_{n_j}/T^j_{n_j}$: c'en est une définition qui s'annonce rigoureuse, puisque c'est le *travail du capital* par unité *d'input*-travail, ou le pouvoir productif supplémentaire qu'apporte le capital à chaque unité *d'input*-travail. Dès lors, le *degré de mécanisation* nul résulte de la nullité du *travail du capital*, quel que soit l'importance du travail humain. Compte-tenu qu'il n'y a probablement pas de production possible sans un *travail du capital* minimum, nous pouvons facilement admettre que cela rendra la production impossible : $g^j_{n_j}(0) = 0$. A l'opposé, un degré qui tend vers l'infini résulte d'une extrême importance du *travail du capital* par rapport au travail humain. Cela rendra la *productivité du travail* extrêmement élevée.

Il ne nous reste plus qu'à définir ce *travail du capital*. Remarquons qu'à moins que la production ne soit entièrement automatisée, ce sont les travailleurs qui font travailler les machines. Ce travail dépend donc, non seulement, de *l'input*-capital et de *l'input*-énergie, mais aussi, de *l'input*-travail. Ce travail a donc le statut d'*input*-travail non-humain, qui ne s'acquière qu'indirectement par l'acquisition de nos trois *inputs*. Nous ne pouvons réitérer à son propos l'hypothèse de la constance de *l'efficacité du travail*. Celle-ci signifierait que le *travail du capital* qu'apporte chaque unité de chacun des trois *inputs* est le même par l'ajustement automatique des deux autres. Or, ce n'est pas *l'input*-capital qui décide des *inputs*-travail et énergie, mais *l'unité de production*.[30] Les trois *inputs* sont des *substituts imparfaits*. En s'accroissant, *l'input*-capital accroît le *travail du capital* en accroissant sa puissance, *l'input*-énergie fait de même en intensifiant son fonctionnement, et *l'input*-travail, en augmentant son utilisation. En outre, une *croissance linéaire* du *travail du capital* avec chaque *input* alors que les deux autres sont constants serait trop irréaliste. Un même accroissement du *travail du capital*, à mesure que ce travail

[30] Un *input*-travail fonctionne aussi avec l'énergie que donnent aux travailleurs qui l'apportent les aliments et l'eau qu'ils consomment. Cette hypothèse signifie que chacun d'eux les consomme selon ses goûts et son travail et cela fait la constance de *l'efficacité* de son travail.

augmente, exige un accroissement variable de *l'input*-énergie, du fait de la variabilité de son lien à l'intensification du fonctionnement du capital, et un accroissement variable de *l'input*-capital ou de *l'input*-travail, à cause de la variabilité, d'une part, de ses liens à l'importance du capital et à la durée d'utilisation, d'autre part, de l'intensité de fonctionnement que cause la constance de *l'input*-énergie. Ces possibilités de substitution et de variation du *travail marginal du capital* doivent être délimitées par une fonction non-linéaire que nous notons $k^j_{n_j}(.)$ et que nous appelons *fonction de travail du capital*. Le travail réalisable pour cette *production intermédiaire* sera donc celui d'un *ensemble de travail du capital* que nous notons $\Omega^j_{n_j}$, défini de la manière suivante : $\Omega^j_{n_j} = \left\{\Gamma^j_{n_j} \in \mathcal{R}_+ : \Gamma^j_{n_j} \leq k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right), \forall x^j_{n_j} \in \mathcal{R}^3_+\right\}$. Il nous faut, là encore, une fonction *continue* et débutant en *l'origine* ($k^j_{n_j}(0,0,0) = 0$) pour confirmer les mêmes propriétés chez $f^j_{n_j}(.)$. Ainsi fait, l'accroissement de la *productivité du travail* résulte de l'accroissement de $D^j_{n_j}$. Il peut donc résulter de l'accroissement de *l'input*-capital ou de *l'input*-énergie. Il peut résulter aussi de l'accroissement de *l'input*-travail dans l'éventualité particulière où la dérivée seconde $\frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j} \partial T^j_{n_j}}$ serait (localement) supérieure à 0, comme on le verra. Il peut résulter enfin du *progrès technique* du capital qui conduira à une augmentation des dérivées premières de la *fonction de travail du capital*.

Notre explicitation de la *fonction de production intermédiaire* est donc finalement : $f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right) \equiv T^j_{n_j}.g^j_{n_j}\left(\frac{k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{T^j_{n_j}}\right)$, et peut se réécrire moyennant le changement variable $f^j_{n_j}\left(T^j_{n_j}, \Gamma^j_{n_j}\right) \equiv T^j_{n_j}.g^j_{n_j}\left(\frac{\Gamma^j_{n_j}}{T^j_{n_j}}\right)$. Terminons par ces quelques remarques.

D'abord, toutes les formes *économétriques* peuvent lui être données. En effet, en choisissant, pour la *fonction de productivité du travail*, la forme *linaire* $g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right) = \lambda D^j_{n_j}$; $\lambda \in \mathcal{R}^*_+$; donc, un graphe en forme de demi-droite croissante depuis *l'origine* dans le plan $y^j_{n_j} O D^j_{n_j}$, on obtient l'égalité de la *fonction de production intermédiaire* et du produit de la *fonction de travail du capital* et de ce même coefficient directeur, $f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right) = \lambda. k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)$. Dès lors, formaliser l'une ou l'autre revient, à peu de chose près, au même. Dans le tableau ci-dessous, nous n'avons évité cette forme qu'une seule fois.

Ensuite, elle a d'autant mieux signifié le caractère humain de la production que maintenant celle-ci se décompose en productions individuelles. Notons $Z^j_{n_j}$, le nombre des travailleurs qui apportent l'*input*-travail et $z^j_{n_j}$, l'indice qui les liste. Cet *input* est la somme de leurs *inputs individuels* : $T^j_{n_j} = \sum_{z^j_{n_j}=1}^{Z^j_{n_j}} T_{z^j_{m_j}}$, et *l'output intermédiaire* est la somme de leurs *outputs individuels*, proportionnels à leurs *in-*

puts : $\Rightarrow y^j_{n_j} = \sum_{z^j_{n_j}=1}^{Z^j_{n_j}} \left(y_{z^j_{n_j}} = T_{z^j_{n_j}} . g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right) \right)$. Un même travailleur peut apporter un ou plusieurs *outputs intermédiaires* individuels à l'unité.

Les principales formes fonctionnelles

$k^j_{n_j}(.)$	$g^j_{n_j}(.)$	$f^j_{n_j}(.)$
$= a_T + a_C \frac{C^j_{n_j}}{T^j_{n_j}} + a_E \frac{E^j_{n_j}}{T^j_{n_j}}$ a_T, a_C, a_E *réels* > 0	$= \lambda D^j_{n_j}$ $\lambda \in \mathcal{R}_+$	*Linéaire* $= \lambda \left(a_T T^j_{n_j} + a_C C^j_{n_j} + a_E E^j_{n_j} \right)$
$= \left(T^j_{n_j}\right)^{\alpha_T} \left(C^j_{n_j}\right)^{\alpha_C} \left(E^j_{n_j}\right)^{\alpha_E}$ $\alpha_T, \alpha_C, \alpha_E$ *réels* > 0	$= \lambda \left(D^j_{n_j}\right)^{\delta}$ $\delta \in \mathcal{R}_+$	*Cobb-Douglas* $= \lambda \left(T^j_{n_j}\right)^{1-\delta\alpha_T} \left(C^j_{n_j}\right)^{\delta\alpha_C} \left(E^j_{n_j}\right)^{\delta\alpha_E}$
Si $0 < \alpha_T + \alpha_C + \alpha_E < 1$ et $0 < \delta < 1$, alors : $0 < 1 - \delta(\alpha_T + \alpha_C + \alpha_E) < 1$		
$= \left[b_T \left(T^j_{n_j}\right)^r + b_C \left(C^j_{n_j}\right)^r + b_E \left(E^j_{n_j}\right)^r \right]^{\frac{1}{r}}$ r, *réel*, b_T, b_C, b_E *réels* > 0: $b_T + b_C + b_E = 1$	$= \lambda D^j_{n_j}$	*CES* $= \lambda \left[b_T \left(T^j_{n_j}\right)^r + b_C \left(C^j_{n_j}\right)^r + b_E \left(E^j_{n_j}\right)^r \right]^{\frac{1}{r}}$
$= \frac{1}{\lambda}\Big[a_{11} \left(T^j_{n_j}\right)^2 + (a_{13} + a_{31}) T^j_{n_j} E^j_{n_j} + (a_{12} + a_{21}) C^j_{n_j} T^j_{n_j} +$ $a_{22} \left(C^j_{n_j}\right)^2 + a_{33} \left(E^j_{n_j}\right)^2 + (a_{23} + a_{32}) C^j_{n_j} E^j_{n_j} \Big]$ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, *réels* tels que : $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{31} = a_{23}$	$= \lambda D^j_{n_j}$	*Quadratique* $= \begin{bmatrix} T^j_{n_j} & C^j_{n_j} & E^j_{n_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T^j_{n_j} \\ C^j_{n_j} \\ E^j_{n_j} \end{bmatrix}$

En outre, elle nous permettrait de retrouver nos *fonctions de productions intermédiaires* à partir de toutes productions plus générales de *types de biens intermédiaires* dans différents *modèles* pour différents *biens*, pourvu que chaque *modèle* ne concerne qu'un seul *bien* et se définisse par sa *technologie* (son rapport des *inputs* à *l'output intermédiaire*). Admettons que la base de la production soit un nombre A *d'activités*, listées à travers a, produisant chacun un tel *type* en quantité y_a avec un trio (T_a, C_a, E_a). Décomposons le travail et l'énergie en *inputs* par *bien* produit, nuls, si le type ne concerne pas le *bien*, positifs, s'il le concerne par un *modèle* : $T_a = \sum_{j=1}^{J} T^j_a, E_a = \sum_{j=1}^{J} E^j_a, T^j_a, E^j_a \equiv 0, si\ j\ non\ concern\acute{e}$, et de la même façon la production : $y_a = \sum_{j=1}^{J} \left[y^j_a = T^j_a . g^j_a \left(\frac{k^j_a\left(T^j_a, C_a, E^j_a\right)}{T^j_a} \right) \right], a = 1, \dots, A$. Nous expliquons ainsi la polyvalence du capital et, en utilisant n_j pour lister les parties d'*activités* concernant j, nous retrouvons nos fonctions $f^j_{n_j}(.)$.

Remarquons, encore, qu'elle s'applique aussi à une *technologie* « manuelle » recourant à un capital fonctionnant sans *input*-énergie. Dans ce cas, la *fonction de productivité du travail* est la même, mais la *fonction de travail du capital* est différente. En effet, la notion de *degré de mécanisation* subsiste, étant donné que le capital continue de travailler (sans son travail, il n'y a plus de production).

Remarquons, enfin, que si la *fonction de travail du capital* est *homogène de degré* σ et la *fonction de productivité du travail*, *homogène de degré* θ, alors la *fonction de production intermédiaire* est homogène de degré $1 + (\sigma - 1)\theta$.

3.3. EXPLICATION DE LA *CONVEXITE*

La *stricte croissance* des *fonctions de production intermédiaires* ne pourra se vérifier si leurs fon*ctions de travail du capital* et de *productivité du travail* ne sont pas elles-mêmes *strictement croissantes*. C'est une condition nécessaire, mais pas suffisante. Le début de l'explication de la *convexité* est donc l'hypothèse : $\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j}, \frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j}, \frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j}, \frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j} > 0, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3, n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$. Par ailleurs, nous avons vu que leurs propriétés sont celles de leurs *fonctions de travail du capital* si leurs *fonctions de productivité du travail* sont *linéaires*. Commençons par définir les dérivées des *degrés de mécanisation*.

$n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$

$\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j} = \frac{1}{T_{n_j}^j}\left(\frac{\partial k_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right)}{\partial T_{n_j}^j} - D_{n_j}^j\right)$	$\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial C_{n_j}^j} = \frac{1}{T_{n_j}^j} \cdot \frac{\partial k_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right)}{\partial C_{n_j}^j}$	$\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial E_{n_j}^j} = \frac{1}{T_{n_j}^j} \cdot \frac{\partial k_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right)}{\partial E_{n_j}^j}$

Sous cette hypothèse, un petit accroissement de *l'input*-capital ou de *l'input*-énergie accroît le *degré de mécanisation* : $\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial C_{n_j}^j}, \frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial E_{n_j}^j} > 0, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3$. En revanche, un petit accroissement de *l'input*–travail induit un taux marginal de variation du degré dont le signe relève d'une autre propriété. D'un côté, cela l'accroît en accroissant le *travail du capital* au taux $\frac{1}{T_{n_j}^j}\frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j}$, de l'autre, cela le réduit en accroissant le travail humain (qui ne consiste pas qu'en l'utilisation du capital) au taux $-\frac{k_{n_j}^j(.)}{\left(T_{n_j}^j\right)^2}$. Ce taux est donc inférieur, égal ou supérieur à 0, selon que $T_{n_j}^j \frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j} - k_{n_j}^j(.)$ est inférieur, égal ou supérieur à 0, ce qui qui revient à dire que la fonction est, respectivement, *concave*, *linéaire* ou *convexe*, ou encore que sa dérivée seconde en $T_{n_j}^j$ est inférieure, égale ou supérieure à 0 : $\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j}\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial T_{n_j}^j}\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3$.[31] Passons aux dérivées premières des *fonctions de production intermédiaires*.

[31] Nous avons admis que $k_{n_j}^j(0,0,0) = 0$. La dérivée de $k_{n_j}^j(.)$ en $T_{n_j}^j$ est la pente de la tangente à son graphe en $T_{n_j}^j$ et le produit de $T_{n_j}^j$ et de cette pente est *l'ordonnée* qu'associe à $T_{n_j}^j$ la demi-droite parallèle à cette tangente passant par *l'origine*. L'image qu'elle associe à $T_{n_j}^j$ est inférieure, égale ou supérieure à $k_{n_j}^j\left(T_{n_j}^j\right)$, si $k_{n_j}^j(.)$ est *concave* (le graphe passe au-dessus de la demi-droite), *linéaire* (le graphe est cette demi-droite), ou *convexe* (il passe dessous).

$$n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$$

$\dfrac{\partial f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right)}{\partial T_{n_j}^j} = g_{n_j}^j\left(D_{n_j}^j\right) + T_{n_j}^j \dfrac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j} \cdot \dfrac{\partial g_{n_j}^j\left(D_{n_j}^j\right)}{\partial D_{n_j}^j}$
$\dfrac{\partial f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right)}{\partial C_{n_j}^j} = T_{n_j}^j \cdot \dfrac{\partial D_{n_j}^j}{\partial C_{n_j}^j} \cdot \dfrac{\partial g_{n_j}^j\left(D_{n_j}^j\right)}{\partial D_{n_j}^j}$
$\dfrac{\partial f_{n_j}^j\left(x_{n_j}^j\right)}{\partial E_{n_j}^j} = T_{n_j}^j \cdot \dfrac{\partial D_{n_j}^j}{\partial E_{n_j}^j} \cdot \dfrac{\partial g_{n_j}^j\left(D_{n_j}^j\right)}{\partial D_{n_j}^j}$

La *croissance stricte* de ses *fonctions de productivité du travail* et *de travail du capital* suffit à garantir que les dérivées premières de chaque *fonction de production intermédiaire* par rapport à ses *inputs*-capital et énergie sont supérieures à 0 : $\frac{\partial f_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j}, \frac{\partial f_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j} > 0, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3$. Ses *inputs*-capital et énergie ne produisent qu'à travers son *input*-travail, en augmentant sa productivité par le *travail du capital*. Un petit accroissement de l'un ou l'autre induit un taux marginal d'accroissement de la *productivité du travail* égal à $\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial C_{n_j}^j}\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j}$ ou $\frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial E_{n_j}^j}\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j}$ et un taux marginal d'accroissement de *l'output intermédiaire* égal à ce taux fois $T_{n_j}^j$; donc, à $\frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j}\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j}$ ou $\frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j}\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j}$. En revanche, elle ne suffit pas à garantir la supériorité à 0 de sa dérivée par rapport à son *input*-travail. Celui-ci est premier dans la production. Sa *productivité marginale* a deux composantes : ce qu'ajoutera en propre son petit accroissement $dT_{n_j}^j$ sans prise en compte de son effet sur le *degré de mécanisation*, $g_{n_j}^j(.)dT_{n_j}^j$; ce qu'il ajoutera ou ponctionnera à la production de toutes les unités qui le composent jusque-là à travers la variation marginale du *degré de mécanisation*, $T_{n_j}^j \frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j}\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} dT_{n_j}^j$. Dans cette seconde composante, l'ajout marginal est $\frac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j}\frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} dT_{n_j}^j$ et la ponction marginale, $-D_{n_j}^j \frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} dT_{n_j}^j$. Elle est supérieure, égale ou inférieure à 0, selon que $dT_{n_j}^j$ accroît, maintient, ou réduit le *degré de mécanisation* ; autrement dit, selon que $k_{n_j}^j(.)$ est *convexe*, *linéaire* ou *concave*. Si $dT_{n_j}^j$ réduit $D_{n_j}^j$, la supériorité à 0 de la dérivée de $f_{n_j}^j(.)$ n'est garantie par la *stricte croissance* de $g_{n_j}^j(.)$ que si celle-ci est *linéaire* ou *concave*, car alors la différence entre l'apport en propre et la ponction marginale est respectivement égale ou supérieure à 0 : $si \frac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j} < 0, g_{n_j}^j(.) - D_{n_j}^j \frac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} \left\{ \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} \right. 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j \partial D_{n_j}^j} \left\{ \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} \right. 0$. Passons aux dérivées secondes.

$n_j = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J$

$\frac{\partial^2 f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial T^j_{n_j}\partial T^j_{n_j}} = \frac{\partial^2 k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial T^j_{n_j}\partial T^j_{n_j}} \cdot \frac{\partial g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)}{\partial D^j_{n_j}} + \frac{1}{T^j_{n_j}}\left[\frac{\partial k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial T^j_{n_j}} - D^j_{n_j}\right]^2 \frac{\partial^2 g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)}{\partial D^j_{n_j}\partial D^j_{n_j}}$
$\frac{\partial^2 f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial C^j_{n_j}\partial C^j_{n_j}} = \frac{\partial^2 k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial C^j_{n_j}\partial C^j_{n_j}} \cdot \frac{\partial g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)}{\partial D^j_{n_j}} + \frac{1}{T^j_{n_j}}\left[\frac{\partial k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial C^j_{n_j}}\right]^2 \frac{\partial^2 g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)}{\partial D^j_{n_j}\partial D^j_{n_j}}$
$\frac{\partial^2 f^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial E^j_{n_j}\partial E^j_{n_j}} = \frac{\partial^2 k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial E^j_{n_j}\partial E^j_{n_j}} \cdot \frac{\partial g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)}{\partial D^j_{n_j}} + \frac{1}{T^j_{n_j}}\left[\frac{\partial k^j_{n_j}\left(x^j_{n_j}\right)}{\partial E^j_{n_j}}\right]^2 \frac{\partial^2 g^j_{n_j}\left(D^j_{n_j}\right)}{\partial D^j_{n_j}\partial D^j_{n_j}}$

Compte-tenu de leurs définitions, les dérivées secondes de chaque *fonction de production intermédiaire* sont inférieures à 0 ou finissent toujours par l'être après avoir été nulles s'il leur arrive d'être nulles, si celles de sa *fonction de travail du capital* et de sa *fonction de productivité du travail* le sont aussi : $\frac{\partial^2 f^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}\partial T^j_{n_j}}, \frac{\partial^2 f^j_{n_j}(.)}{\partial C^j_{n_j}\partial C^j_{n_j}}, \frac{\partial^2 f^j_{n_j}(.)}{\partial E^j_{n_j}\partial E^j_{n_j}} \leqq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}\partial T^j_{n_j}}, \frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial C^j_{n_j}\partial C^j_{n_j}}, \frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial E^j_{n_j}\partial E^j_{n_j}}, \frac{\partial^2 g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}\partial D^j_{n_j}} \leqq 0, \forall x^j_{n_j} \in \mathcal{R}^3_+$. Après un petit accroissement de son *input*-capital, le taux marginal de variation de la dérivée de $f^j_{n_j}(.)$ par rapport à cet *input* se compose du taux marginal de variation à dérivée de la fonction $g^j_{n_j}(.)$ égal ; autrement dit, dans l'hypothèse où $g^j_{n_j}(.)$ est *linéaire* (qu'elle le soit ou non), $T^j_{n_j}\frac{\partial^2 D^j_{n_j}}{\partial C^j_{n_j}\partial C^j_{n_j}}\frac{\partial g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}} = \frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial C^j_{n_j}\partial C^j_{n_j}}\frac{\partial g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}}$, et du taux marginal de variation par le seul effet du taux marginal de variation de la dérivée de $g^j_{n_j}(.)$ dû à son éventuelle *convexité* ou *concavité* (nul, si elle est *linéaire*), $T^j_{n_j}\frac{\partial D^j_{n_j}}{\partial C^j_{n_j}}\frac{\partial\left(\partial g^j_{n_j}(.)/\partial D^j_{n_j}\right)}{\partial C^j_{n_j}} = \frac{1}{T^j_{n_j}}\left(\frac{\partial k^j_{n_j}(.)}{\partial C^j_{n_j}}\right)^2 \frac{\partial^2 g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}\partial D^j_{n_j}}$. La *concavité* de $k^j_{n_j}(.)$ induit la négativité du premier et la *linéarité* ou *concavité* de $g^j_{n_j}(.)$ induit la nullité ou la négativité du second. Le même résultat vaut après un petit accroissement de son *input*-énergie. Dans le cas de *l'input*-travail, intervient un effet de compensation. Dans le taux marginal de variation de la dérivée de $f^j_{n_j}(.)$ par rapport à $T^j_{n_j}$, le taux marginal de variation de l'apport en propre de $dT^j_{n_j}$, $\frac{\partial g^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}}$, est le contraire du taux marginal de variation de sa ponction marginale de la production de toutes les unités de $T^j_{n_j}$ dans l'hypothèse où $g^j_{n_j}(.)$ est *linéaire*, $\frac{\partial\left(-D^j_{n_j}\right)}{\partial T^j_{n_j}}\frac{\partial g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}}$. Ne restent donc que le taux marginal de variation de son ajout marginal à cette productivité dans cette même hypothèse, $\frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}\partial T^j_{n_j}}\frac{\partial g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}}$, et celui de son effet global sur cette même productivité dû à l'éventuelle non-*linéarité* de $g^j_{n_j}(.)$, $\left(\frac{\partial k^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}} - D^j_{n_j}\right)\frac{\partial\left(\partial g^j_{n_j}(.)/\partial D^j_{n_j}\right)}{\partial T^j_{n_j}} = \frac{1}{T^j_{n_j}}\left(\frac{\partial k^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}} -\right.$

$D_{n_j}^{j}\Big)^2 \frac{\partial^2 g_{n_j}^{j}(.)}{\partial D_{n_j}^{j}\partial D_{n_j}^{j}}$. La *concavité* de $k_{n_j}^{j}(.)$ induit la négativité du premier et la *linéarité* ou la *concavité* $g_{n_j}^{j}(.)$ induit la nullité ou la négativité du second.

Notre explication de la *croissance stricte* et de la *concavité* de la *fonction de production intermédiaire* est donc la *croissance stricte* et la *concavité* de la *fonction de travail du capital* et la *croissance stricte* et la *non-convexité* de la *fonction de productivité du travail*. Le mystère de la décroissance de la *productivité marginale* de chaque *input* s'éclaircit de la façon suivante. Pour *l'input*-capital ou *l'input*-énergie, l'explication est la même. Sous ces hypothèses, une unité supplémentaire de cet *input* accroît *l'output intermédiaire* en accroissant la production identique de chaque unité de *l'input*-travail, cela, parce qu'elle accroît le *degré de mécanisation* qui profite à toutes ces unités, en accroissant le *travail du capital*. Son effet d'accroissement diminue à mesure que *l'input* augmente, parce que l'accroissement du *travail du capital* est de plus en plus faible et parce que la *productivité du travail* est aussi « sensible » ou de moins en moins « sensible » à un même accroissement du *degré de mécanisation*. L'affaiblissement de l'accroissement du *travail du capital* provient de ce que les deux autres *inputs* sont fixes. L'accroissement de *l'input*-capital doit générer un taux d'accroissement du *travail du capital* de plus en plus faible, à consommation d'énergie et durée d'utilisation égales, de même que l'accroissement de *l'input*-énergie (l'intensification du fonctionnement du capital), à importance du capital et durée d'utilisation égales. Pour *l'input*-travail, l'explication est plus complexe. Sous ces hypothèses, une unité supplémentaire de cet *input* diminue la production de chacune des unités qui la précédent, parce qu'elle réduit le *degré de mécanisation* malgré qu'elle augmente le *travail du capital*, mais cela ne l'empêche pas d'accroître *l'output intermédiaire*, parce que cette réduction du *degré de mécanisation* est telle que son apport en propre en *output intermédiaire* (à *degré de mécanisation* égal) dépasse cette diminution de la production des unités antérieures.[32] A mesure que *l'input*-travail augmente, sa productivité diminue, parce que la perte de production des unités antérieures s'accroît, cela, parce son apport en *travail du capital* se réduit et accentue son effet de décroissance du *degré de mécanisation* et parce que la production des unités antérieures reste aussi « sensible » ou est de plus en plus « sensible » au *degré de mécanisation* à mesure que celui-ci diminue. La réduction de l'apport en *travail du capital* provient de la fixité de *l'input*-énergie et de *l'input* capital. *L'input*-travail augmente la durée d'utilisation du capital et cette augmentation a un rendement qui faiblit, parce que le capital est constant et parce que la fixité de la consommation d'énergie implique le ralentissement de son fonctionnement.[33]

[32] Le fait que sa contribution soit composée d'un apport en propre et d'une ponction des productions des unités antérieures, ne signifie pas que la projection de la vue en coupe du graphe de la fonction doive être retracée plus bas et de manière qu'elle parvienne quand même à un plus grand *output intermédiaire* : son apport et sa ponction sont comptabilisés ensemble, à son seul niveau, dans son apport net ; les productions des unités qui la précèdent ont beau diminuer analytiquement, elles restent graphiquement inchangées.

[33] Dans le cadre de la *technologie* « manuelle », il faudra admettre la constance de la dérivée de la *fonction du travail du capital* par rapport à *l'input*-travail, car *l'input*-énergie ne sera plus là pour concilier la constance de *l'efficacité du travail* et la *concavité* de la *fonction de travail du capital*.

Ces hypothèses sont-elles plausibles ? La *croissance stricte* de la *fonction de productivité du travail* avec le *degré de mécanisation* n'appelle pas de critique particulière quant à sa plausibilité dès lors qu'est aussi admise sa *non-convexité*. Si le *travail du capital* est configuré, comme le travail humain, pour être le plus adapté à la réalisation de *l'output intermédiaire*, il n'y a pas de raison que le rapport de *l'output intermédiaire* maximal à *l'input*-travail n'augmente pas si le *travail du capital* par unité de cet *input* augmente. On peut même admettre la *linéarité* de la fonction comme plausible. Il n'en va pas de même pour la *stricte croissance* de la *fonction de travail du capital*. Le réalisme voudrait que le *travail du capital* maximal ne croisse pas indéfiniment avec un des trois *inputs* lorsque les deux autres sont constants. Une machine constitue un stock de capital bien défini, renfermant un certain état des sciences et des techniques. Son travail maximal ne peut croître indéfiniment avec sa consommation d'énergie dans le cadre d'une certaine durée d'utilisation (à cause de la limite à l'intensification de son fonctionnement), pas plus qu'avec sa durée d'utilisation, dans les limites d'une certaine consommation d'énergie. Tôt ou tard, il atteint lui-même un maximum, puis, décroît jusqu'à s'annuler, et le progrès de cet état des sciences et des techniques ne peut que retarder cette échéance. De même, en augmentant son importance (sa taille, ses éléments de puissance, à état inchangé), on augmente son travail dans le cadre d'une certaine consommation d'énergie et d'une certaine utilisation, mais pas indéfiniment. Le réalisme n'accepterait un prolongement indéfini de la phase de croissance du *travail du capital* maximal, avant que n'advienne sa décroissance, que si les trois *inputs* augmentent simultanément. Si, tout, à la fois, l'importance, la durée d'utilisation et la consommation d'énergie de *l'input*-capital augmentent, il n'y a pas de raison que s'interrompe la croissance de son travail. Cela veut dire que l'écriture vraisemblable à donner à la *fonction de travail du capital* est, en fait, $k^j_{n_j}\left(T^j_{n_j}, C^j_{n_j}; E^j_{n_j}\right)$, dans laquelle *l'input*-énergie a le statut de *variable d'environnement*, qui établit, pour chacune de ses valeurs, un certain état de la relation entre ce travail et les *inputs*-travail et capital, et donc, que le *graphe* vraisemblable à donner à cette fonction n'est pas dans $\mathcal{R}^4_+$, mais dans $\mathcal{R}^3_+$, et se présente sous la forme d'une famille de *graphes*, chacun d'eux montrant le travail maximal pour une certaine valeur constante de *l'input*-énergie et ayant la forme d'un dôme au sommet unique de plus en plus large sur sa base longeant les axes des deux *inputs* et plus ou moins allongé selon l'état de disproportion entre ses phases de croissance et de décroissance, dont les projections des vues en coupe sur les plans $\Gamma^j_{n_j} O T^j_{n_j}$ et $\Gamma^j_{n_j} O C^j_{n_j}$ donnent toujours deux courbes en cloche finissant par atteindre l'axe de *l'input*, et dont l'échelle augmente chaque fois qu'augmente la valeur constante de *l'input*-énergie, si bien que sa phase de croissance ne cesse de grandir avec $E^j_{n_j}$. Dans ces conditions, la relation entre $\Gamma^j_{n_j}$ et $E^j_{n_j}$ serait donnée par l'équation de *l'enveloppe* à cette famille de *graphes*. Or, s'il en va ainsi pour le réalisme de la *fonction de travail du capital*, il doit en aller de même pour celui de la *fonction de production intermédiaire*. Dans son état le plus vraisemblable, celle-ci devrait plutôt s'écrire $f^j_{n_j}\left(T^j_{n_j}, C^j_{n_j}; E^j_{n_j}\right)$ et se présenter graphiquement comme une famille de

La *concavité* de la *fonction de production intermédiaire* impliquera la *concavité* de la *fonction de productivité par unité d'input-travail*.

graphes dans $\mathcal{R}_+^3$, en forme de dômes et augmentant d'échelle avec $E_{n_j}^j$. Or, de nouveau, cela implique qu'il doit en aller de même pour la *frontière de production* d'un *output*. Cette explicitation de la fonction nous fait donc comprendre le rôle particulier des sources d'énergie dans la production et qu'il est une raison profonde à l'irréalisme de la *monotonicité* de *l'ensemble de production*.

Terminons par les définitions des *dérivées secondes croisées*, ou les différentes dérivées par rapport à un *input* des dérivées de la *fonction de production intermédiaire* par rapport à un autre *input*, ou l'inverse, puisque le *théorème d'Hermann* S*CHWARZ* garantit un résultat égal quel que soit le sens de dérivation du seul fait que la fonction est *continue*. Autant pour le réalisme que pour la commodité de la modélisation de la *décision de production*, il serait bien que celles concernant *l'input*-travail soient positives. Voici leurs définitions.

$$n_j = 1, \ldots, N_j, j = 1, \ldots, J$$

$\dfrac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial C_{n_j}^j} = \dfrac{\partial^2 k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial C_{n_j}^j} \dfrac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} + \dfrac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j} \dfrac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j} \dfrac{\partial^2 g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j \partial D_{n_j}^j}$
$\dfrac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial E_{n_j}^j} = \dfrac{\partial^2 k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial E_{n_j}^j} \dfrac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} + \dfrac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j} \dfrac{\partial D_{n_j}^j}{\partial T_{n_j}^j} \dfrac{\partial^2 g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j \partial D_{n_j}^j}$
$\dfrac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j \partial C_{n_j}^j} = \dfrac{\partial^2 k_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j \partial E_{n_j}^j} \dfrac{\partial g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j} + \dfrac{1}{T_{n_j}^j} \dfrac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial E_{n_j}^j} \dfrac{\partial k_{n_j}^j(.)}{\partial C_{n_j}^j} \dfrac{\partial^2 g_{n_j}^j(.)}{\partial D_{n_j}^j \partial D_{n_j}^j}$

Ces dérivées se composent de deux effets sur la *productivité du travail* : un effet à *degré de mécanisation* égal, par le taux marginal de variation du *travail marginal du capital* ; un effet par le taux marginal de variation de ce *degré*. Un petit accroissement de *l'input*-travail doit accroître ou maintenir le *travail marginal* de *l'input*-capital ou de *l'input*-énergie, en augmentant l'utilisation du capital, exactement comme un petit accroissement de *l'input*-capital ou de *l'input*-énergie doit accroître ou maintenir le *travail marginal* de *l'input*-travail en renforçant le travail à chaque utilisation par l'augmentation de l'importance du capital ou de son intensité de fonctionnement. Sous l'hypothèse $\frac{\partial^2 k_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial C_{n_j}^j}, \frac{\partial^2 f_{n_j}^j(.)}{\partial T_{n_j}^j \partial E_{n_j}^j} \geq 0, \forall x_{n_j}^j \in \mathcal{R}_+^3$ et les hypothèses de *croissance stricte* et de *concavité* des *fonctions de travail du capital* et de *croissance stricte* et de *non-convexité* des *fonctions de productivité du travail*, les dérivées secondes « travail/capital » et « travail/énergie » sont positives. En augmentant, *l'input*-travail augmente les *productivités marginales* des *inputs*-capital et énergie, parce qu'il augmente leur *travail marginal* et parce qu'il maintient ou relève la *productivité du travail*, en maintenant ou en abaissant le *degré de mécanisation*. De façon plus générale, la dérivée seconde « *travail humain/travail du capital* » est donc positive. Si nous écrivons $f_{n_j}^j\left(T_{n_j}^j, \Gamma_{n_j}^j\right) = T_{n_j}^j \cdot g_{n_j}^j\left(\frac{\Gamma_{n_j}^j}{T_{n_j}^j}\right)$, nous voyons que $\frac{\partial^2 f^j_{n_j}(.)}{\partial T^j_{n_j}\partial \Gamma^j_{n_j}} = \left(\frac{\partial \Gamma^j_{n_j}}{\partial T^j_{n_j}} - \frac{D^j_{n_j}}{T^j_{n_j}}\right)\frac{\partial^2 g^j_{n_j}(.)}{\partial D^j_{n_j}\partial D^j_{n_j}}$ et ainsi, que cette dérivée seconde est supérieure à 0 dès lors que $\frac{\partial \Gamma^j_{n_j}}{\partial T^j_{n_j}} - \frac{D^j_{n_j}}{T^j_{n_j}} = \frac{\partial D^j_{n_j}}{\partial T^j_{n_j}} < 0$. En revanche, sous l'hypothèse $\frac{\partial^2 k^j_{n_j}(.)}{\partial C^j_{n_j}\partial E^j_{n_j}} \geq 0, \forall x^j_{n_j} \in \mathcal{R}^3_+$ le signe de la dérivée seconde « capital/énergie » reste indéterminé. Son premier effet est supérieur ou égal à 0 et son second, inférieur ou égal à 0 selon que la *fonction de productivité du travail* est *concave* ou *linéaire*, puisque croît le *degré de mécanisation*.

Conclusion

Ce complément aux *contraintes techniques* réactualise le modèle *néoclassique* de trois manières.

D'abord, il l'ouvre sur la production pluri-*outputs* en lui faisant préciser chaque *bien* produit comme un assemblage de *biens intermédiaires* régi par des *coefficients techniques* et le prépare ainsi à un complément à sa détermination par les prix des limites de la production de l'unité à travers sa décision d'achats et de ventes de *biens intermédiaires*. Il lui fait préciser *l'ensemble de production* pluri-*outputs* comme une union d'ensembles mono-*output* et chaque ensemble mono-*output*, comme une mise en relation technique *d'ensembles de production intermédiaire*, délimités chacun par une *fonction de production intermédiaire*. Cette mise en relation est la définition de *l'output* comme le minimum des rapports de chaque *output intermédiaire* qui le compose à son *coefficient technique*. Il lui fait donc préciser la *frontière* de chaque ensemble mono-*output* comme l'ensemble des *plans* des différentes *productions intermédiaires* qu'il nécessite, constitués de *leurs outputs intermédiaires* et de leurs *inputs*, tels que, pour chacun, *l'output intermédiaire* est défini comme l'image de la *fonction de production intermédiaire* et son rapport au *coefficient technique* qui le relie à *l'output* est égal à *l'output*. Cette *frontière* reste délimitée par une *fonction de production* de *l'output*, mais signifiant cette équivalence des *productions intermédiaires* et donc, au domaine de définition limité à ces vecteurs *d'inputs harmonisés*. Il lui fait préciser la pente de cette *frontière*, ou la dérivée de cette fonction, par rapport à un de ces *inputs*, comme le rapport de la dérivée de la *fonction de production intermédiaire*, dans laquelle intervient plus précisément cet *input*, au *coefficient technique* qui la relie à *l'output*. Tout cela n'a coûté que de réitérer l'hypothèse qu'un *bien* produit se définit par sa *technologie de production* et un *bien intermédiaire*, par sa *technologie de production intermédiaire*, d'anticiper l'existence de marchés de *biens intermédiaires*, d'introduire des *fonctions de production intermédiaire* et de repenser les concepts de *correspondance en inputs* d'un *output* et son *isoquante* sous une forme plus générale.

Ensuite, il lui fait préciser les vecteurs *d'inputs* comme des trios *d'inputs*-travail, capital et énergie dédiés chacun à une *production intermédiaire* (dans le cadre le plus général d'une *technologie* mécanisée), tout en prenant garde à la capacité de polyvalence des *inputs*-capital, ou leur capacité de servir à différents *outputs intermédiaires* n'entrant pas forcément dans la composition du même *output*. Cette précision exclue les *inputs*-matières premières, normalement reliés aux *outputs* par des *coefficients techniques* pour ne pas gêner la *convexité* de *l'ensemble de production*. Ceux-ci sont à récupérer dans la modélisation de la *décision de production*, dans la définition du prix de vente de chaque *bien* produit *net* de son *coût unitaire* en matières premières. Elle exclue également tous les *inputs* envisagés jusque-là qui correspondent, en fait, à des achats de *biens intermédiaires*. Ceux-ci obtiennent ainsi leur véritable statut. Cette précision n'a coûté que de faire appel au concept de *métier* en tant que trait d'union des trois *inputs*, puisque source de la *technologie de production* qui les réunit.

Enfin, il lui fait expliciter chaque *fonction de production intermédiaire* comme le produit de son *input*-travail et d'une *fonction de productivité du travail* ayant pour seul argument le *degré de mécanisation* de la *production intermédiaire*, ou le rapport à ce même *input*, du *travail du capital* tel que délimité par *une fonction de travail du capital*, ayant pour arguments, de nouveau, *l'input*-travail et les *inputs*-capital et énergie. Cette explicitation ne spécifie pas la fonction en permettant d'en retrouver toutes les formes numériques possibles, remet l'être humain au centre de la production en réfutant toute confusion de *l'unité de production* et de la *technologie de production* et s'applique aussi bien à une *technologie* manuelle, ne faisant intervenir dans la *fonction de travail du capital* que *l'input*-travail et *l'input*-capital. Elle ne nous a coûté que de repenser l'hypothèse classique de la constance de *l'efficacité du travail* à travers le postulat de la primauté de *l'input*-travail et d'introduire ces variables nouvelles du *travail du capital* (n'ayant pas un statut *d'input* à proprement parler), et du *degré de mécanisation* (au sens assez synthétique et évident puisqu'il est le *travail du capital* par unité de travail humain).

L'enjeu de ce complément était de faire du modèle *néoclassique* une approche raisonnablement réaliste de ce qui se passe à l'intérieur de *l'unité de production* et de lui faire tenir la comparaison avec la *programmation linéaire d'activités*, qui retient une production pluri-*outputs*, y introduit les *outputs intermédiaires* et explique complètement la *convexité* de *l'ensemble de production*. L'explication de la *convexité* de *l'ensemble de production* par l'explicitation de la *fonction de production intermédiaire* peut être considérée comme son aboutissement. Outre qu'elle le rapproche de la *programmation linéaire d'activités*, qui obtient la *convexité* par la maximisation de productions plurielles à partir de ressources communes limitées à la façon d'un *optimum de Pareto*, cette explication débarrasse le modèle d'une mal-interprétation du rôle des personnes dans la production dont il a été jusque-là affublé pour évacuer ce besoin d'explication. La *convexité* des *ensembles de production*, du côté des *unités de production*, comme des *ensembles d'utilités possibles*, du côté des *consommateurs*, est une condition fondamentale à l'existence et l'unicité de *l'équilibre général* dans la plupart des *modèles d'équilibre général* qui admettent des profits supérieurs à 0 à l'équilibre.[34] Or, pour l'approche *néoclassique*, si l'explication de la *convexité* des *ensembles des utilités possibles* pouvait provenir des traits psychologiques communs fondamentaux du consommateur, que sont son *goût pour les mélanges* et son sentiment de *satiété*, étant donné le caractère person-

[34] *Cf.*, *infra*, *note 2*, en bas de première page. Notons qu'une ultime famille des modèles délimite les hypothèses nécessaires *l'équilibre général* en présence de *non-convexités* des *ensembles de production*, notamment des *rendements d'échelles croissants* (Cornet, 1988, 1990).

nel de *sa fonction d'utilité*, en revanche, pour les *ensembles de production*, il n'y avait que le caractère *substituable* des *inputs* : manquait l'équivalent de la *satiété*. Le modèle payait ainsi l'absence d'explicitation de la *fonction de production*. *Second pilier* de l'approche *néoclassique* avec la *fonction d'utilité* (SCHUMPETER, 1983), une fois formulée comme la simple relation entre un *output* et ses *inputs*, sous la forme $y = \gamma(x_1, \dots, x_I)$, ou, parfois, entre plusieurs *outputs* et leurs *inputs*, sous la forme $\varphi\left(x_1, \dots, x_I, y_1, \dots, y_J\right) = 0$, pour définir la production maximale (WICKSTEED, 1932, SCHNEIDER, 1934, ALLEN, 1938, HICKS, 1939), la *fonction de production* n'avait, en effet, jusque-là, jamais connu d'approfondissement de sa définition théorique qui lui fasse préciser la nature des *inputs* et la manière dont ils se combinent. Sa *concavité* implique que la projection de la vue en coupe de son *graphe*, sur tout plan constitué de l'axe de *l'output* et de l'axe d'un de ses *inputs*, prend la forme d'une courbe *croissante* et *concave*. Si pour les yeux l'image était claire, l'esprit, lui, dans cet état liminaire de sa définition, était dans la plus complète opacité pour se l'expliquer, surtout pour le rôle-même que se donne l'être humain dans la production : un *input*-travail. Cette abstraction confinant au vide théorique a ainsi fini par provoquer un grave désaccord avec la réalité. C'est sans doute en grande partie à cause de cette opacité que l'usage s'est autant répandu, dans les manuels, de confondre *l'unité de production* et la *technologie de production*. A réifier *l'unité de production* comme l'agent-producteur, on gagnait de pouvoir lui imputer la propriété plutôt qu'à *l'input* et ses relations à *l'output* et aux autres *inputs*, là où pourtant cherche l'esprit. Le discours économique sur la production, construit sur la base de cet objet, tendait ainsi à ne plus reconnaître que sa *technologie* est dans toutes les personnes qui y ont travaillé. Notre complément remédie à ce défaut. Nous en obtenons, d'abord, que la *convexité* de *l'ensemble de production* est, plus précisément, la *convexité* des *ensembles de productions intermédiaires* ou la *concavité* des *fonctions de production intermédiaire*. Nous en obtenons, ensuite, que la *concavité* de ces fonctions est dans la *non-convexité* de leur *fonction de productivité du travail* et la *concavité* de leur *fonction de travail du capital*. Ces deux dernières propriétés donnent une explication précise de la décroissance de la *productivité marginale* d'un *input*, au sein d'une *production intermédiaire*, à travers l'effet de son petit accroissement, d'une part, sur *l'input*-travail, d'autre part, sur le *degré de mécanisation* de cette production et, de là, sur la *productivité du travail*.

Nous pourrions même avancer comme quatre avantages pris sur la *programmation d'activités*, la meilleure prise en compte des *outputs intermédiaires*, qui ne sauraient être des *inputs*, la préparation à l'introduction des *marchés de biens intermédiaires* et des décisions d'achat et de vente sur ces marchés de l'unité, qui sont au cœur des systèmes de production modernes, la prise en compte de la capacité de polyvalence des *inputs*-capital, qui est au cœur de leur valorisation, et la possibilité d'expliquer la *convexité* même pour une production mono-*output*, alors qu'elle ne peut l'être que pour une production *pluri*-outputs dans le cadre de la programmation. Mais, maintenant qu'il est fini, le statut exact de ce complément reste à confirmer : sera-t-il, comme nous l'avons pressenti, un simple prolongement du modèle, ou deviendra-t-il une alternative, engageant l'approche *néoclassique* dans une nouvelle voie ? La réponse à cette question dépend de sa suite immédiate : la *décision de production*. Si cette décision ne change pas dans sa substance, qu'est la règle *marginaliste* de l'égalisation du *coût marginal* à la *recette marginale*, il pourra, dans ses parties *contraintes* et *décision*, pour ainsi dire, tenir entre parenthèses dans les manuels de *microéconomie*. Si elle change, au point de devoir s'écarter de cette règle, il se dégagera comme une alternative. *A priori*, il ne devrait pas la changer dès lors que *l'ensemble de production* est *convexe*, mais ses précisions auront quand même leur lot d'implications. Alors, que deviendra la *décision de production* de *l'unité de production* avec ce complément ?

RÉFÉRENCES

AKERLOF, George A, YELLEN, Janet, L., 1986, *Efficiency wage models of the labor market*, Cambridge University Press.

ALLEN, R. G. D., 1938, *Mathematical analysis for economists*, *Mac Milan and co*, London.

AOKI, Masahico, 1986, "*Horizontal versus vertical structure of information of the firm*", *The American Economic Review*, vol. 76, n° 5, December.

ARROW, Kenneth J., DEBREU, Gérard, 1954, "*Existence of equilibrium for a competitive economy*", *Econometrica*, vol. 22, n° 3, july, pp. 265-290.

ARROW, Kenneth J., ENTHOVEN, Alain C., 1961, "*Quasi concave programming*", *Econometrica*, vol. 29, n° 4, october, pp. 779-801.

ARROW, KENNETH J., 1974, "*General economic equilibrium. Purpose, analytic techniques. Collective choice*", *American economic review*, vol. 64, n° 3, pp. 253-272.

BAUDRY, Bernard, 1993, « *Partenariat et sous-traitance: une approche par la théorie des incitations* », *Revue d'économie industrielle*, vol. 66, 4ème trimestre.

BECKER, Gary S., 1962, « *Investment in human capital : a theoretical analysis*", *Journal of political economy*, vol. 70, n° 5, part 2.

BRIEC, Walter, PEYPOCH, Nicolas, 2010, *Microéconomie de la production, la mesure de l'efficacité et de la productivité*, *de Boeck*.

CAHUC, Pierre, ZYLBERBERG, André, 2001, *Marché du travail*, *De Boeck Université*.

CASSEL, Gustav, 1918,

COASE, Ronald H, 1937, « *The nature of the firm* », *Economica*, vol. 4, n° 16, November.

CORNET, Bernard, 1988, "*General equilibrium theory and increasing returns. Presentation*", *Journal of mathematical economics*, vol. 17, pp. 103-118.

CORNET, Bernard, 1990, « *La théorie mathématique de l'équilibre économique : extension du modèle Arrow-Debreu au cadre non-convexe* », *Annales de l'I.H.P. section C*, tome 7, n° 3, pp. 161-181.

COT, Anne-Lou, LALLEMENT, Jérôme, 2006, « *1859-1959 : de Walras à Debreu, un siècle d'équilibre général* », *Revue économique*, vol. 57, mars.

DEBREU, Gérard, 1951, "*The coefficient of resource utilization*", *Econometrica*, vol. 19, n° 3, july, pp. 273-292.

DEBREU, Gérard, 1959, *Theory of value*, *Wiley*, New-York.

DUPRAT, Henri, 1983, "*Problèmes posés par les nomenclatures et l'agrégation*", *in* ADEFI, *Economie industrielle, problématique et méthodologie*, actes du colloque organisé par *l'ESC de Lyon*, *Economica*.

EWALD, François, 1986, *L'Etat providence*, *Grasset*, Paris.

FARREL, M. J., 1957, « The *measurement of productive efficiency*", *Journal of the Royal Statistical Society*, *series A*, *part III*, vol. 120, n° 3.

FOURGEAUD, Claude, PERROT, Anne, 1990, *Calcul économique et microéconomie approfondie*, *Economica*.

FRUIT, René, 1962, « *La fonction de production de Cobb-Douglas* », *Revue économique*, vol. 13, n° 2, pp. 186-236.

GALE, David, 1955, « *The law of supply and demand* », *Mathematica Scandinavica*, n° 3, pp. 155-169.

GAZIER, Bernard, 1992, *Economie du travail et de l'emploi*, Dalloz.

GOLLIER, Christian, 1996, « *Vers une théorie économique des limites de l'assurabilité* », *Revue d'économie financière*, n° 37.

GRAVELLE, Hugh, REES, Rey, 1984, *Microeconomics*, *Longman*.

GUERRIEN, Bernard, 1989, *La théorie néoclassique, bilan et perspectives du modèle de l'équilibre général*, *Economica*, 2ème édition.

GUERRIEN, Bernard, NEZEYS, Bertrand, 1987, *Microéconomie et calcul économique*, *Economica*, 2ème édition.

HENDERSEN, J. M., QUANDT, R. E., 1990, *Microéconomie*, Dunod.

HENRIET, Dominique, ROCHET, Jean-Charles, 1991, *Microéconomie de l'assurance*, *Economica*.

HICKS, J. R., 1946, *Value and capital, An inquiry into some fundamental principles of economic theory*, *Oxford University Press*, second edition (first, 1939), trad. Française, 1959, *Valeur et capital, enquêtes sur divers principes fondamentaux de la théorie économique*, Paris, Dunod.

KOOPMANS, Tjalling C. (ed.), 1951, *Activity analysis of production and allocation, proceedings of a conference*, COWLS COMMISSION FOR RESEARCH IN ECONOMICS, *Monograph n° 13*, N.-Y., Wiley.

KOOPMANS, Tjalling C., 1951, "Analysis of production as an efficient combination of activities", in KOOPMANS Tjalling (ed.), *Activity analysis of production and allocation, proceedings of a conference*, COWLS COMMISSION FOR RESEARCH IN ECONOMICS, *Monograph n° 13*, N.-Y., Wiley.

KUHN, H W., TUCKER, A W., 1951, "*Non-linear programming*", in NEYMAN J. (ed.), *Proceedings in the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles University of California Press.

L'HORTY, Yannick, RAULT, Christophe, 2002, « *Les effets de la croissance, du coût et de la durée du travail sur l'emploi en France : une réévaluation* », *Travail et emploi*, n° 91, juillet.

LESUEUR, J. Y., SABATIER, M., 2008, *Microéconomie de l'emploi, théories et applications*, De Boeck, *ouvertures économiques*.

MCKENZIE, Lionel, 1954, "*On equilibrium in Graham's model of World trade and other competitive systems*", *Econometrica*, vol. 22, n° 2, april, pp. 147-161.

MALINVAUD, Edmond, 1954, "*Koopmans Tjallling C, ed, Activiy analysis of production and allocation, proceedings of a conference*", *Revue économique*, vol. 5, n° 1, pp. 126-128.

MALINVAUD, Edmond, 1999, *Leçons de théorie microéconomique*, Dunod, 4ème édition.

MARX, Karl, 1993, *Le capital*, *livre 1*, *Presses universitaire de France*, *Quadrige* (première édition, 1867).

NIKAÏDO, Hukukane, 1956, « *On the classical multilateral exchange problem*", Microeconomica, 8, pp. 135-145

PARETO, V., 1909, Manuel d'économie politique, Paris, *Giard et Brières*.

PERCEROU, Roger, 1990, « *Améliorer la performance juridique de l'entreprise* », Revue française de gestion, n° 81, novembre-décembre, pp. 8-33.

PINDICK, Robert, RUBINFELD, Daniel, 2009, *Microéconomie*, *Pearson education France*, 7ème édition.

RAVIX, Jacques-Laurent (dir.), 1996, *Coopération entre les entreprises et organisation industrielle*, *CNRS Editions*.

SAMUELSON, Paul A., 1947, *Fundations of economic analysis*, Cambridge, Mass., *Harvard University Press*, trad. Française : 1971, *Les fondements de l'analyse économique*, 2ème édition, *Dunod*, Paris.

SAMUELSON, Alain, 1992, *Les grands courants de la pensée économique, concepts de base et questions essentielles*, *Presses universitaires de Grenoble*, 4ème édition.

SCHLESINGER, Karl, 1934, "*Uber die produktionsgleichungen des ôkonomishen wertlehere*", *Ergerbnisse eines mathematischen kolloquiums*, 8, pp. 76-88, traduction anglaise, "*On the production equations of economic value theory*", in BAUMOL William, GOLDFIELD, Stephen, 1968, *Precursors in mathematical economics*, London, *London school of economics and political science*.

SCHNEIDER, Erich, 1934, *Theory der produktion*, Vienne, J. *Springer*.

SCHUMPETER, Joseph, A., 1983, *Histoire de l'analyse économique, III L'âge de la science*, *Gallimard* (édition originale en 1954).

SCITOVSZKY, Tibor, 1943, « *A note on profit maximization and its implications* », *The Review of Economic Sudies*, vol. 11, n° 1, pp. 57-60.

SHEPHARD, R. W., 1953, *Cost and production functions*, *Pinceton University Press*.

TRIOLAIRE, Guy, 1994, *L'entreprise et son environnement économique*, Dalloz, Sirey, 2ème édition.

TRUCHON, Michel, 1988, « *Programmation mathématique et théorie économique* », *L'actualité économique*, vol. 64, n° 2, juin, pp. 143-156.

VARIAN, Hal R., 1995, *Analyse microéconomique*, *De Boeck Université*.

WALD, Abraham, 1936, "*Über einige gleichungsysteme der matthematischen ökonomie*", *Zeitschrift für national-ökonomie*, vol 7, n° 5, pp. 637-670, traduction anglaise: 1951, « *On Some System of Equations of Mathematical Economics* », *Econometrica*, vol. 19, n° 4, october, pp.368-403.

WALRAS, Léon, 1874, *Eléments d'économie politique pure*, Lausanne, *Corbaz* (achevé dans la 4ème édition, en 1900).

WICKSTEED, Philip H., 1932, *An essay on the co-ordination of the laws of distribution*, London, *Mac Milan*.

WILLIAMSON, Oliver E., 1991, "*Comparative economic organization: The analysis of discrete structural alternatives*", *Administrative Science Quarterly*, Vol. 36, n° 2, June.